Variables aléatoires sur un univers fini

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

M1. Savoir reconnaître et utiliser les lois classiques.
M2. Savoir calculer des lois de couples et déduire les lois marginales des lois de couples.
M3. Savoir étudier l'indépendance de variables aléatoires.

On note ci-dessous $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Plan

Définition 1:

1. On appelle variable aléatoire sur E toute application $X : \Omega \to E$.
2. Si de plus $E \subset \mathbb{R}$, on dit que la variable aléatoire est réelle.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé (équilibré) à six faces deux fois de suite. Alors $\Omega = [\![1;\ 6]\!]^2$ et $w \in \Omega$ est de la forme $w = (a;\ b)$ avec $a \in [\![1;\ 6]\!]$ et $b \in [\![1;\ 6]\!]$.

- Si l'on regarde la face obtenue au premier lancer on définit une variable aléatoire réelle $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X_1((a;\ b)) = a$.
- Si l'on regarde la face obtenue au deuxième lancer on définit une variable aléatoire réelle $X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $X_2((a;\ b)) = b$.
- Si l'on regarde la somme des deux numéros obtenus, nous obtenons également une variable aléatoire réelle X telle que $X((a;\ b)) = a + b$.
- Si l'on regarde le produit des deux numéros obtenus, nous obtenons également une variable aléatoire réelle Y telle que $Y((a;\ b)) = ab$.

REMARQUE : Nous avons en fait : $X = X_1 + X_2$ et $Y = X_1X_2$.

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors : $\varphi \circ X = \varphi(X)$ est une autre variable aléatoire réelle.

- **Notations :** Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle, l'évènement noté $(X \leq x)$ (ou $(X = x)$) correspond à l'ensemble des valeurs $w \in \Omega$ telles que $X(w) \leq x$ (ou $X(w) = x$).
- Puisque Ω est un ensemble fini, alors $X(\Omega) = \{x_1 \; ; \; x_2; \; \ldots; \; x_n\}$ est un ensemble fini. On appelle loi de probabilité de X l'ensemble des valeurs $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$, avec $i \in [\![1; \; n]\!]$.

REMARQUES :

1. Si X et Y sont deux variables aléatoires qui ont la même loi, on note : $X \sim Y$.
2. Si $X \sim Y$, alors $\varphi(X) \sim \varphi(Y)$.

Exemple : On reprend les notations de l'exemple précédent. Alors :

- La loi de X_1 est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p_i = \mathbb{P}(X_1 = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- La loi de X_2 est la même que celle de X_1.
- La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On remarque dans l'exemple ci-dessus que la somme des éléments p_i fait 1, d'où le 1. de la proposition ci-dessous.

Proposition 1

Soient X une variable aléatoire sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega; \mathbb{P}))$ un espace probabilisé

1. $$\sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$$
2. L'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0;\ 1]$ qui à chaque $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ associe $\mathbb{P}(X \in A)$ est une probabilité sur $(X(\Omega); \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

Définition 2:

Soit X est une variable aléatoire réelle. On appelle espérance de X, et on note $E(X)$, le nombre réel défini par : $E(X) = \sum_{w \in \Omega} X(w)\mathbb{P}(\{w\})$.

Exemple : Si X est la variable aléatoire correspondant au nombre de PILE lors du lancer 3 fois de suite d'une pièce équilibrée, alors :

$$E(X) = \underbrace{0 \times \frac{1}{8}}_{w=(F,F,F)} + \underbrace{1 \times \frac{1}{8}}_{w=(P,F,F)} + \underbrace{1 \times \frac{1}{8}}_{w=(F,P,F)} + \underbrace{1 \times \frac{1}{8}}_{w=(F,F,P)} + \underbrace{2 \times \frac{1}{8}}_{w=(P,P,F)} + \underbrace{2 \times \frac{1}{8}}_{w=(P,F,P)} + \underbrace{2 \times \frac{1}{8}}_{w=(F,P,P)} + \underbrace{3 \times \frac{1}{8}}_{w=(P,P,P)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Ceci correspond en fait au nombre moyen de PILE obtenus.

REMARQUE : On peut regrouper la somme précédente comme-suit :

$$E(X) = \underbrace{0}_{x_0} \times \underbrace{\frac{1}{8}}_{P(X=x_0)} + \underbrace{1}_{x_1} \times \underbrace{(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})}_{P(X=x_1)} + \underbrace{2}_{x_2} \times \underbrace{(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8})}_{P(X=x_2)} + \underbrace{3}_{x_3} \times \underbrace{\frac{1}{8}}_{P(X=x_3)} .$$

On conjecture alors plus généralement la formule suivante :

Proposition 2

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Proposition 3

1. (linéarité de l'espérance) Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, et $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$, alors $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
2. (Inégalité triangulaire) $|E(X)| \leq E(|X|)$.
3. (Croissance) si $X \leq Y$ alors : $E(X) \leq E(Y)$.
4. Si A est un évènement, alors $E(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

conséquence :

En particulier : $\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b,}$ ou encore : $E(aX) = aE(X)$ et $E(X + b) = E(X) + b$.

Proposition 4 (théorème de transfert)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors : $\boxed{E(\varphi(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \varphi(x_i)\mathbb{P}(X = x_i)}$

Exemple : On lance trois fois de suite une pièce de monnaie et on note X le nombre de PILE obtenus. Pour calculer $E(X^2)$, nous pouvons regrouper l'ensemble des informations nécessaires dans le tableau ci-dessous :

x_i	0	1	2	3
$p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
x_i^2	0	1	4	9
$x_i^2 p_i$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$.

On en déduit : $E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 p_i = \frac{24}{8} = 3.$

Définition 3:

Soit X est une variable aléatoire réelle.

1. On appelle variance de X, et on note $V(X)$, le nombre réel :
$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (x_i - E(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i).$$
2. On appelle écart-type de X, et on note $\sigma(X)$, le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 5 (formule de Koenig-Huygens)

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Exemple : On reprend l'exemple (ci-dessus) de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite.

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$x_i^2\mathbb{P}(X = x_i)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$

On en déduit $E(X^2) = \frac{24}{8}$ donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{24}{8} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

Proposition 6

$V(aX+b) = a^2V(X)$.

REMARQUES :

1. En particulier $V(X+b) = V(X)$ et $V(aX) = a^2V(X)$.
2. Si X est une variable aléatoire telle que $\sigma(X) > 0$, alors : $Y = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est d'espérance nulle et de variance égale à 1. On dit alors que Y est centrée et réduite.

Proposition 7

Soit $a > 0$.

1. (Inégalité de Markov) $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \dfrac{E(|X|)}{a}$;
2. (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq a) \leq \dfrac{V(X)}{a^2}$.

Plan

Définition 4:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire suit la loi uniforme sur $[\![1;\ n]\!]$ lorsque :

$$X(\Omega) = [\![1;\ n]\!] \quad \text{et } \forall k \in [\![1;\ n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Notation : On note $X \sim \mathcal{U}(n)$.

Exemple : On lance un dé non truqué à 6 faces et on note X le numéro obtenu. Alors $X(\Omega) = [\![1;\ 6]\!]$ et $\forall k \in [\![1;\ 6]\!]$, $\mathbb{P}(x = k) = \frac{1}{6}$ donc $X \sim \mathcal{U}(6)$.

Proposition 8

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[\![1;\ n]\!]$. Alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

Définition 5:

Soit $p \in]0;\ 1[$. On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre p lorsque :

$$X(\Omega) = \{0;\ 1\} \quad \text{et } \mathbb{P}(X=1) = p, \quad \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

Notation : On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Exemple :

1. On lance une pièce de monnaie non truquée et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on tombe sur PILE et 0 sinon. Alors : $\mathbb{P}(X=1) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=p}$ et $\mathbb{P}(X=0) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=1-p}$
   $X \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. On lance un dé non truqué à 6 faces et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient la face 6 et 0 sinon. Alors, si A « on obtient 6 », on sait que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{5}{6}$.
   Or $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{5}{6}$.

Proposition 9

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

Définition 6:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;\ 1[$. On dit qu'une variable aléatoire suit la loi binômiale de paramètres n et p lorsque :

$$X(\Omega) = [\![0;\ n]\!] \quad \text{et } \forall k \in [\![0;\ n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Notation : On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

ExempleS :

1. On lance trois fois de suite un dé non truqué à 6 faces et on note X le nombre de 6 obtenus. Alors, si l'on note $\Omega = [\![1; 6]\!]^3$ et A_k : ≪ j'obtiens k 6 ≫, nous avons :
$\mathrm{Card}(A_k) =$
$$\underbrace{\binom{3}{k}}_{\text{choix des numéros des lancers avec 6}} \times \underbrace{5^{3-k}}_{\text{choix des autres numéros pour les lancers restants}},$$
et $\mathrm{Card}(\Omega) = 6^3$ donc : $\mathbb{P}(A_k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$.
On en déduit : $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(A_k) = \binom{3}{k} \left(\underbrace{\frac{1}{6}}_{=p}\right)^k \left(\underbrace{\frac{5}{6}}_{=1-p}\right)^{3-k}$.
Ainsi : $X \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{6}\right)$.

REMARQUE : En reprenant l'exemple ci-dessus, si X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on obtient un PILE au i-ème lancer et 0 sinon, alors $X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $X = X_1 + \ldots + X_n$.

Plus généralement, si l'on répète n épreuves de Bernoulli de paramètre p de façons indépendantes, alors la variable aléatoire correspondant au nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p. C'est comme cela que l'on repère en pratique qu'une loi vérifie une loi binômiale.

REMARQUES :

1. Nous avons bien : $\displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$. En effet :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$ d'après la formule du binôme de Newton.
2. Pour $n = 1$, nous retrouvons en fait une loi de Bernoulli de paramètre p.

Proposition 10

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binômiale de paramètres n et p. Alors : $E(X) = np$ et $V(X) = npq = np(1-p)$.

Exercice 1

[-M1-] Jérémy se rend à son lycée distant de 3 km. Il fait le trajet à vélo à une vitesse constante de 30 km/h. Sur le parcours, il rencontre 5 feux de signalisation (qu'il respecte scrupuleusement) non synchronisés. Pour chaque feu rencontré la probabilité qu'il soit vert est $\frac{2}{3}$, et qu'il soit rouge $\frac{1}{3}$. Un feu vert ne ralentit pas l'élève mais un feu rouge lui fait perdre 1 min.

1. Soit N la variable aléatoire correspondant au nombre de feux rouges rencontrés. Quelle est la loi de probabilité de N ?
2. Soit T la variable aléatoire correspondant au temps mis par l'élève pour se rendre au lycée. Exprimer T en fonction de N. Quelle est la loi de probabilité de T ?
3. L'élève part 7 min avant le cours. Quelle est la probabilité qu'il arrive en retard ?
4. Quelle est la durée moyenne du parcours ? La vitesse moyenne correspondante ?

Exercice 2

[-M1-]

Ben établit un programme pour ses vacances scolaires. Il aimerait pratiquer l'anglais tous les jours. Le premier jour, jour 1, il écoute une émission sur la BBC. Puis,

- si le jour i il a écouté une émission, alors le jour suivant il fait de la grammaire avec une probabilité de $1/2$ (sinon il écoute une émission),
- sinon, il écoute une émission avec probabilité $2/3$

Soit X_i la variable aléatoire valant 1 si Ben fait de la grammaire le jour i et $p_i = \mathbb{P}(X_i = 1)$, 0 sinon.

- (Q 1) Établir une relation de récurrence entre p_{i+1} et p_i.
- (Q 2) En déduire p_i.
- (Q 3) Calculer $E(X)$, avec X le nombre de jour où Ben fait de la grammaire pendant les 60 jours de vacances.

Plan

Définition 7:

Soit $X; Y$ deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$. Alors le couple $(X; Y)$ définit une nouvelle variable aléatoire définie sur $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
La loi de $(X; Y)$ est appelée loi conjointe de (X, Y).
Les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y.

Déterminer la loi conjointe d'un couple, c'est déterminer les valeurs de $\mathbb{P}(X = x_k \cap Y = y_p)$ avec $X = \{x_1;\ \ldots;\ x_n\}$ et $Y = \{y_1;\ \ldots;\ y_m\}$.

Exemple : Une urne contient trois boules bleues, une rouge et six jaunes. On y pioche successivement et avec remise deux boules. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues obtenues, Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues. On a $X(\Omega) = \{0,\ 1,\ 2\}$ et $Y(\Omega) = \{0,\ 1,\ 2\}$.

$P(X = 0 \cap Y = 1) = 2 \times \frac{1}{10} \frac{6}{10} = \frac{3}{25}$.

$Y(\Omega)$ \ $X(\Omega)$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$		
$\underbrace{0}_{=y_1}$	$\underbrace{\frac{9}{25}}_{\mathbb{P}(X=x_1 \cap Y=y_1)}$	$\underbrace{\frac{9}{25}}_{\mathbb{P}(X=x_2 \cap Y=y_1)}$	$\underbrace{\frac{9}{100}}_{\mathbb{P}(X=x_3 \cap Y=y_1)}$	$\frac{81}{100}$	$\leftarrow \mathbb{P}(Y = y_1)$
$\underbrace{1}_{=y_2}$	$\underbrace{\frac{3}{25}}_{\mathbb{P}(X=x_1 \cap Y=y_2)}$	$\underbrace{\frac{3}{50}}_{\mathbb{P}(X=x_2 \cap Y=y_2)}$	$\underbrace{0}_{\mathbb{P}(X=x_3 \cap Y=y_2)}$	$\frac{18}{100}$	$\leftarrow \mathbb{P}(Y = y_2)$
$\underbrace{2}_{=y_3}$	$\underbrace{\frac{1}{100}}_{\mathbb{P}(X=x_1 \cap Y=y_3)}$	$\underbrace{0}_{\mathbb{P}(X=x_2 \cap Y=y_3)}$	$\underbrace{0}_{\mathbb{P}(X=x_2 \cap Y=y_3)}$	$\frac{1}{100}$	$\leftarrow \mathbb{P}(Y = y_3)$
	$\frac{49}{100}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{9}{100}$	1	
	$\uparrow$ $\mathbb{P}(X = x_1)$	$\uparrow$ $\mathbb{P}(X = x_2)$	$\uparrow$ $\mathbb{P}(X = x_3)$		

Proposition 11

Soit $X(\Omega) = \{x_1; \cdots; x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; \cdots; y_n\}$. Alors

$$\forall i \in \{1 : \cdots ; p\}, \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i \ \cap \ Y = y_j)$$

$$\forall j \in \{1 : \cdots ; n\}, \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(X = x_i \ \cap \ Y = y_j).$$

Définition 8:

Soit $(X;Y)$ un couple de variable aléatoire. Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=y) \neq 0$. Alors la loi conditionnelle de X sachant l'évènement $(Y=y)$ est :

$$\mathbb{P}_{X|Y=y} : \begin{array}{ccl} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \rightarrow & [0;1] \\ A & \mapsto & \mathbb{P}(X \in A | Y=y) = \dfrac{\mathbb{P}((X \in A) \cap Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} \end{array}$$

C'est donc une loi de probabilité.

Exemple :
On reprend les variables aléatoires de l'exemple précédent. On calcule la loi conditionnelle de Y sachant $X = x_1$:

- $\mathbb{P}(Y=y_1|X=x_1) = \dfrac{\mathbb{P}(Y=y_1 \cap X=x_1)}{\mathbb{P}(X=x_1)} = \dfrac{9/25}{49/100} = \dfrac{36}{49}$.
- $\mathbb{P}(Y=y_2|X=x_1) = \dfrac{\mathbb{P}(Y=y_2 \cap X=x_1)}{\mathbb{P}(X=x_1)} = \dfrac{3/25}{49/100} = \dfrac{12}{49}$.
- $\mathbb{P}(Y=y_3|X=x_1) = \dfrac{\mathbb{P}(Y=y_3 \cap X=x_1)}{\mathbb{P}(X=x_1)} = \dfrac{1/100}{49/100} = \dfrac{1}{49}$.

⇨ Indépendance de deux variables aléatoires :

Définition 9:

Soient $(X;Y)$ deux variables aléatoires sur Ω. On dit que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\forall x \in X(\Omega); y \in Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

c'est à dire si les évènements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants pour tous x et y.

Exemple : On reprend l'exemple précédent : on constate par exemple que : $\mathbb{P}(X = x_1 \cap Y_1) = \frac{9}{25}$ et $\mathbb{P}(X = x_1) \times \mathbb{P}(Y = y_1) = \frac{81}{100} \times \frac{49}{100}$. Puisque ces deux valeurs sont différentes, on en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

Proposition 12

(Lemme des coalitions) Si X, Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

REMARQUES :

1. Plus généralement, si X_1, ..., X_n sont indépendantes alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.
2. Le résultat précédent s'étend de la même façon avec n fonctions au lieu de 2.

Exemple : Si X_1, ..., X_n sont indépendantes alors $X_2 + \ldots + X_n$ et X_1 sont indépendantes.

Théorème 1

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

On pose $Z = XY$. On sait : $E(XY) = \sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(Z = z)(*)$ On note $X(\Omega) = \{x_1; \cdots; x_p\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; \cdots; y_n\}$. Alors les évènements $\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big)_{i;j\in\{1;\cdots;p\}\times\{1;\cdots;n\}}$ forment un système complet d'évènements. Donc

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{1\leq i\leq p;1\leq j\leq n} \mathbb{P}\Big((Z = z) \cap (X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big).$$

On remplace dans $(*)$:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{1\leq i\leq p;1\leq j\leq n} \sum_{z\in Z(\Omega)} z\mathbb{P}(\Big(Z = z) \cap (X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) \\ &= \sum_{1\leq i\leq p;1\leq j\leq n} x_iy_j\mathbb{P}\Big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\Big) \\ &= \sum_{1\leq i\leq p;1\leq j\leq n} x_iy_j\mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j) \quad \text{par indépendance.} \end{aligned}$$

Par la propriété des sommes RECTANGULAIRES, on reconnait : $\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\mathbb{P}(X = x_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\mathbb{P}(Y = y_j)\right) = E(X)E(Y)$. Ainsi, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

La réciproque est fausse. Par exemple, soit $(X;Y)$ dont la loi conjointe est résumée dans le tableau ci-dessous :

$X\backslash Y$	$\underbrace{-1}_{y_1}$	$\underbrace{0}_{y_2}$	$\underbrace{1}_{y_3}$
$\underbrace{-1}_{x_1}$	$1/6$	$1/6$	0
$\underbrace{0}_{x_2}$	0	$1/3$	0
$\underbrace{1}_{x_3}$	$1/6$	$1/6$	0

$\boxed{E(XY) = E(X)E(Y).}$ Pourtant X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 10:

On appelle covariance de deux variables aléatoires X et Y, et on note $Cov(X,Y)$, le réel : $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Si $Cov(X,Y) = 0$ on dit que X et Y sont décorrélées.

REMARQUE : Si X et Y sont indépendantes alors X et Y sont décorrélées d'après la proposition précédente.

conséquence :

Si X_1 et X_2 sont décorrélées, alors : $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$.

Plus généralement, si $X_1, \dots, X_n$ sont décorrélées, alors :

$$V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n).$$

Le théorème suivant est l'écriture précise du principe mathématique suivant, très utilisé en probabilités : ≪ la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques est un schéma de Bernoulli ≫.

Théorème 2

Soit $X_1; \cdots; X_n$ des variables aléatoires sur Ω indépendantes suivant une même loi de bernoulli de paramètre p. Alors $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale de paramètres $(n; p)$.

REMARQUE :
On obtient de cette façon sans effort (i.e sans calculs de sommes compliqués) les valeurs de l'espérance et de la variance d'une loi binômiale de paramètres n et p. En effet, si $X_1, \ldots$et X_n sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p (RAPPEL : l'espérance d'une loi de Bernoulli est p et sa variance est $p(1-p)$), alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit une loi binômiale de paramètres n et p. Or :

- par linéarité de l'espérance : $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p = \boxed{np}$.
- par propriété des variables aléatoires décorrélées (car indépendantes) :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p) = \boxed{np(1-p)}.$$

Exercice 3

[-M2-]
Prenons une urne de 3 noires, et 4 rouges. On note X la variable aléatoire égale à 1 si la première est noire, 0 sinon, et Y la variable aléatoire égale à 1 si la seconde est noire, 0 sinon. Donner les lois des couples de variables aléatoires suivants puis la loi de X et Y lorsque le tirage a lieu :

1. *avec remise.* (X_a, Y_a) ?
2. *sans remise.* (X_s, Y_s) ?

Exercice 4

[-M2-] On jette deux dés discernables. On nomme X et Y les variables aléatoires égales respectivement au plus petit et au plus grand numéro obtenu. Donner la loi conjointe du couple $(X; Y)$, puis les lois marginales de X et de Y.

Exercice 5

[-M3-] Soient $X; Y$ deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre $p \in]0;\ 1[$. Calculer $\mathbb{P}(X - Y = 0)$. Les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont elles indépendantes ?

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆