

Trigonométrie

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- VI.1 savoir faire du calcul algébrique avec les fonctions trigonométriques usuelles.

Plan

- 1 Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel
 - Le cercle trigonométrique
 - Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel
 - Relations fondamentales
 - Les exercices du jour
- 2 Formules de trigonométrie supplémentaires
- 3 Fonctions trigonométriques usuelles
- 4 Équations et inéquations trigonométriques

On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

- À tout réel x correspond un unique point M sur le cercle trigonométrique ;
- À tout point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels, mais un unique réel $\theta_0 \in]-\pi; \pi]$, appelé mesure principale. Tous les autres réels θ associés au même point sont de la forme $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 1: (relation de congruence)

Soient a et b deux réels. On dit que a est congru à b modulo 2π et on note : $a \equiv b [2\pi]$ lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = b + k2\pi$.

Proposition 1

- ❶ Si $a \equiv a_1 [2\pi]$ et $b \equiv b_1 [2\pi]$, alors : $a + b \equiv a_1 + b_1 [2\pi]$.
- ❷ Si $a \equiv a_1 [2\pi]$ alors $\forall c \in \mathbb{R} : ca \equiv ca_1 [c2\pi]$.

Définition 2:

Soient x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé au réel x . On appelle :

- cosinus de x , et on note $\cos(x)$, l'abscisse de M .
- sinus de x , et on note $\sin(x)$, l'ordonnée de M .
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, lorsque cette expression a un sens.

Proposition 2

❶ Pour tout réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

❷ $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Exercice 1

| [-M1-] Calculer $\sin\left(\frac{91\pi}{6}\right)$.

Exercice 2

| [-M1-] Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en utilisant uniquement que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Plan

- 1 Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel
- 2 Formules de trigonométrie supplémentaires
 - Propriétés algébriques
 - Formules d'addition pour $\cos$ et $\sin$
 - Formules associées à $\tan$
 - Les exercices du jour
- 3 Fonctions trigonométriques usuelles
- 4 Équations et inéquations trigonométriques

Proposition 3(propriétés algébriques)

Pour tout réel x , nous avons les relations :

- ❶ $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
- ❷ Pour tout entier relatif k , $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ (2π périodicité) ;
- ❸ $\cos(-x) = \cos(x)$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$;
- ❹ $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$;
- ❺ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.



conséquences :



- ❶ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos(-x) = \cos(x)$;
- ❷ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin(-x) = -\sin(x)$.

Proposition 4

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,
 $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) ;$
 $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) ;$
 $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) ;$
 $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b).$
- $\forall a \in \mathbb{R}$,
 $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
 $\quad = 2 \cos^2(a) - 1$
 $\quad = 1 - 2 \sin^2(a) ;$
 $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$

**conséquence :**

On en déduit les formules de linéarisation de $\cos(a) \cos(b)$ et $\sin(a) \sin(b)$:

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (-\cos(a + b) + \cos(a - b)) \quad .$$

⇒ Propriétés algébriques :

Proposition 5

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nous avons :

- ❶ $\tan(-x) = -\tan(x)$ (imparité) ;
- ❷ $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ (π -périodicité) ;
- ❸ $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$;
- ❹ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ (pour $x \neq 0 [\pi]$.)

⇒ Formules d'addition :

Proposition 6

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} ; & \tan(a-b) &= \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)} ; \\ \tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)} . \end{aligned}$$

Exercice 3

[-M1-] Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4

[-M1-] Simplifier les expressions suivantes :

(a) $A = \sin(\pi + x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right);$

(b) $B = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$

(c) $C = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

Exercice 5

[-M1-] Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}, \cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a).$

Exercice 6

[M1-] Montrer que $\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2, \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Exercice 7

[M1-] Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que x n'est pas congru 0 module π . On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Exprimer simplement $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ uniquement en fonction de t .

Plan

- 1 Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel
- 2 Formules de trigonométrie supplémentaires
- 3 Fonctions trigonométriques usuelles
 - Les fonctions cosinus et sinus
 - La fonction tangente
- 4 Équations et inéquations trigonométriques

Définition 3:

- ① On appelle fonction cosinus, et on note $\cos$, la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
- ② On appelle fonction sinus, et on note $\sin$, la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

⇒ Dérivées et tableaux de variations :

Proposition 7

- ① La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$;
- ② La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$;

On en déduit les tableaux de variations :

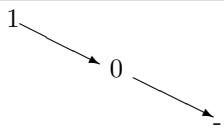
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$-\sin(x)$	0	-	-1	-	0
cos					

Tableau de variations de $\cos$ sur $[0; \pi]$

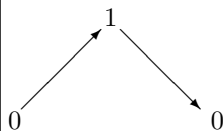
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$\cos(x)$	1	+	0	-	-1
$\sin$					

Tableau de variations de $\sin$ sur $[0; \pi]$

⇒ Courbes représentatives :

- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $\cos$ est 2π périodique. On peut donc restreindre son étude sur un intervalle de longueur 2π : $[-\pi; \pi]$.
 - $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est donc paire.Il suffit donc d'étudier la fonction $\cos$ sur $[0; \pi]$. On complètera le tracé de la courbe représentative par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis par 2π périodicité.
- De la même façon ($\sin$ est impaire et 2π périodique), on complètera le tracé de la courbe représentative par symétrie par rapport à l'origine puis par 2π périodicité.

⇒ définition et premières propriétés :

Définition 4:

On appelle fonction tangente, et on note $\tan$, la fonction définie par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

REMARQUE : $\tan(x)$ n'a pas de sens si et seulement si :

$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} [\pi]$. Le domaine de définition de la fonction tangente est donc : $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

⇒ dérivée et sens de variation :

Proposition 8

La fonction tangente est dérivable sur $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, et :

$$\forall x \in D, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

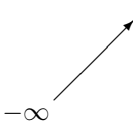
⇒ limites et tableau de variations :

Proposition 9

$$\textcircled{a} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty ;$$

$$\textcircled{b} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty.$$

On en déduit finalement le tableau de variations sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
tan		

Plan

- 1 Cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel
- 2 Formules de trigonométrie supplémentaires
- 3 Fonctions trigonométriques usuelles
- 4 Équations et inéquations trigonométriques
 - Équations
 - Les exercices du jour



Les fonctions cosinus, sinus et tangentes n'étant pas strictement monotones, nous n'avons pas en toutes généralités les équivalences $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow x = y$ etc...

Proposition 10

1. $\cos(U) = \cos(V) \Leftrightarrow U \equiv V [2\pi] \text{ ou } U \equiv -V [2\pi];$
2. $\sin(U) = \sin(V) \Leftrightarrow U \equiv V [2\pi] \text{ ou } U \equiv \pi - V [2\pi];$
3. $\tan(U) = \tan(V) \Leftrightarrow U \equiv V [\pi].$

Exercice 8

[-M1-] Résoudre les équations suivantes :

$$(a) \cos(x) = \frac{1}{2}; \quad (b) \tan(2x - \pi) = \sqrt{3}.$$

Exercice 9

[-M1-]

À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre l'inéquation : $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$ puis $\tan(x) > 1$.

