Systèmes linéaires

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

On note :

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- pour $n \in \mathbb{N}^*$, $[\![1;\ n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n.

Plan

Définition :

1. On appelle système linéaire de n équations, à p inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$, un système de la forme :
$$(\mathrm{S})\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \text{ avec } a_{ij} \in \mathbb{K} \text{ pour } ; \begin{cases} i \in [\![1;\ n]\!] \\ j \in [\![1;\ p]\!] \end{cases}.$$
2. Pour $i \in [\![1;\ n]\!]$ et $j \in [\![1;\ p]\!]$, les réels a_{ij} sont appelés les coefficients du système et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont appelés les seconds membres du système ;
3. Pour $i \in [\![1;\ n]\!]$, on appelle i-ème ligne de (S) , et on note L_i, l'équation : $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p = b_i$.

notations : On associe à (S) :

- un tableau rectangulaire A de n lignes et p colonnes, appelé matrice des coefficients, en rangeant le coefficient a_{ij} à la i-ème ligne et j-ième colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

- le tableau B obtenu en rangeant les seconds membres : $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

- le tableau : $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$, appelé matrice augmentée.

Définition :

On appelle opérations élémentaires sur un système linéaire (S) les opérations suivantes :

1. permutation de deux lignes L_i et L_j : $L_i \leftrightarrow L_j$;
2. multiplication de la ligne L_i par λ : $L_i \leftarrow \lambda L_i$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$;
3. combinaison d'une autre ligne L_j à une ligne L_i $(i \neq j)$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

REMARQUE : On définit de la même façon des opérations élémentaires sur la matrice des coefficients de (S) ainsi que sur la matrice augmentée de (S).

REMARQUE : Si on passe d'un système (S) à un autre système (S') par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de (S') s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de (S) .

Proposition

Soit (S) un système linéaire, alors tout système (S') obtenu à partir de (S) en faisant une suite finie d'opérations élémentaires est équivalent au système (S).

Attention aux opérations élémentaires simultanées : partant du système : (S) $\begin{cases} \frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = 1 \\ \frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}z & = 0 \\ -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = 0 \end{cases}$, en faisant les opérations élémentaires simultanées : $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$, nous obtenons le système : $(\mathrm{S}') \begin{cases} & & z & = 1 \\ x & & -z & = 0 \\ -x & & & = -1 \end{cases}$ qui a pour solution $(1;\ 1;\ 1)$.

Pourtant $(1;\ 1;\ 1)$ n'est pas solution de (S), donc (S) et (S') ne sont pas équivalents.

Définition :

1. Une matrice est dite échelonnée en lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
   (i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes le sont ;
   (ii) à partir de la seconde ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.
2. On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne (non nulle) d'une matrice échelonnée en lignes.
3. Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite en lignes lorsque tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

REMARQUE : De la même façon, on dit qu'un système est échelonné en lignes (réduit ou non) lorsque sa matrice des coefficients l'est.

Proposition

Tout système échelonné en lignes est équivalent à un unique système échelonné réduit en lignes.

Plan

Il s'agit d'un algorithme qui permet de résoudre n'importe quel système quelle que soit sa taille. On part donc d'un système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right. .$$

On suppose par ailleurs que pour chaque inconnue $x_i, i \in [\![1;\ p]\!]$, les coefficients correspondants $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}$ ne sont pas tous nuls. On note :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

la matrice augmentée. On prendra, pour illustrer l'algorithme, le système (S)

$$\left\{\begin{array}{ccccl} & & z & +t & = 1 \\ x & +y & +z & & = 0 \\ x & +y & +2z & +3t & = -1 \\ x & +y & +3z & +10t & = -6 \end{array}\right. .$$

On décompose l'algorithme suivant les étapes suivantes :

(a) premier pivot.

- choix du premier pivot : l'un des coefficients $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}$ n'est pas nul : quitte à permuter les lignes, on se ramène à une matrice augmentée avec le premier coefficient en haut à gauche non nul. On se ramène donc à une matrice augmentée de la forme : $(A|B) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$ avec $a_{11} \neq 0$.

- on se ramène à un pivot égal à 1 : $(A|B) \underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1p} & \tilde{b}_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$. $\quad L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}} L_1$

- on utilise le premier pivot afin de n'obtenir que des coefficients nuls en dessous de ce dernier : $(A|B) \underset{\mathcal{L}}{\sim} A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1p} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2p} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{np} & \tilde{b}_n \end{array}\right)$ $\quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - a_{21} L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - a_{n1} L_1 \end{array}$

(b) pivots suivants.

L'étude dépend des deux situations suivantes :

- L'un des coefficients $\tilde{a}_{22}, \dots, \tilde{a}_{n2}$ n'est pas nul. On poursuit alors l'échelonnement en laissant de côté la première ligne et la première colonne : $A' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A'' \\ 0 & \end{array}\right)$ avec A'' une matrice constituée de $n-1$ lignes et $p-1$ colonnes. On retourne alors en (a) avec A''.
- Tous les coefficients $\tilde{a}_{22}, \dots, \tilde{a}_{n2}$ sont nuls. On laisse alors de côté la première ligne et les deux premières colonnes : $A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & * \cdots * \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & A'' \\ 0 & 0 & \end{array}\right)$ avec A'' une matrice constituée de $n-1$ lignes et $p-2$ colonnes. On retourne alors au (b) avec A''.

(c) fin de l'algorithme.

Nous obtenons au final une matrice échelonnée. On termine l'algorithme en se ramenant à une matrice échelonnée réduite en lignes :

Proposition

> Tout système linéaire (S) est équivalent à un unique système linéaire échelonné réduit en lignes.

Exercice

Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+4z=0 \end{array}\right.$; (b) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=4 \\ x+y+2z+2t=0 \\ x+y+2z+3t=1 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{array}\right.$;

(c) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=4 \\ x+y+2z+2t=0 \\ x+y+2z+3t=0 \end{array}\right.$.

Définition :

On considère un système (S) équivalent à un système échelonné réduit en lignes (S'). On note A' la matrice associée à (S').

1. Une inconnue de (S) est dite **principale** lorsque la colonne de A' correspondante contient un pivot.
2. On appelle rang de (S), et on note $\mathrm{rg}(S)$ le nombre de pivots de A'.

REMARQUE : Une inconnue non principale est appelée **inconnue secondaire** ou **paramètre**.

Proposition

Le nombre de paramètres est égal à la différence du nombre d'inconnues par le rang du système linéaire.

Plan

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des éléments de la forme : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ \vdots \\ x_n \in \mathbb{K} \end{cases}$. On munit $\mathbb{K}^n$ des opérations suivantes :

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$; • $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

notation : Si (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$ est un système de matrice augmentée $(A|B)$, on note :

1. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ la matrice inconnue.
2. $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.
3. (S) s'écrit donc matriciellement : $AX = B$, avec $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Proposition

Si X et X' sont deux éléments de $\mathbb{K}^p$, alors :

- $A(X + X') = AX + AX'$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $A(\lambda X) = \lambda AX$.

Définition :

Un système est dit homogène lorsque le second membre est nul.

REMARQUE : Un système homogène a toujours une solution : $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition (Linéarité de l'ensembles des solutions)

Soient $(\mathrm{S_H})$ un système linéaire homogène de n équations et à p inconnues, et $X_1 \in \mathbb{K}^p$, $X_2 \in \mathbb{K}^p$ deux solutions de $(\mathrm{S_H})$. Alors pour tout $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda X_1 + \mu X_2$ est encore solution de $(\mathrm{S_H})$.

Proposition

Soit (S) un système linéaire homogène de n équations et à p inconnues.

- Si $\mathrm{rg}(S) = p$, alors (S) admet $0_{\mathbb{K}^n}$ pour unique solution ;
- Si $\mathrm{rg}(S) < p$, alors (S) admet une infinité de solutions.

Proposition

On note (S) : $AX = B$ et $(\mathrm{S_H})$: $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$ son système homogène associé.

1. Si X_H est solution de $(\mathrm{S_H})$ et X_0 est solution de (S), alors $X_0 + X_H$ est solution de (S).
2. Réciproquement, toute solution X de (S) s'écrit sous la forme : $X = X_0 + X_H$, où X_0 est solution de (S) et X_H est solution de $(\mathrm{S_H})$.

Définition :

Un système est dit compatible s'il admet au moins une solution. Sinon, on dit qu'il est incompatible.

Exercice

Résoudre $\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & =1 \\ x & +y & +2z & =2 \\ x & +y & +3z & =\lambda \end{array}\right.$ suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition

Nous en déduisons donc toutes les possibilités pour les solutions d'un système linéaire (S) de n équations et à p inconnues :

- soit (S) est incompatible donc n'admet pas de solutions.
- soit (S) est compatible, alors :
  - Si $\mathrm{rg}(S) = p$, (S) admet une unique solution.
  - Si $\mathrm{rg}(S) < p$, (S) admet une infinité de solutions.