Suites de nombres

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Déterminer l'expression simple de suites récurrentes linéaires d'ordres 1 ou 2 ;
- M2 Étudier la monotonie d'une suite ;
- M3 Maîtriser les définitions de limites d'une suite ;
- M4 Utiliser les théorèmes généraux pour prouver la convergence d'une suite.

Plan

1. Généralités
   - Présentation
   - Suites arithmétiques et géométriques
   - Suites linéaires d'ordre 1
   - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2
   - Les exercices du jour

2. Comportement global d'une suite

3. Comportement asymptotique d'une suite

4. Résultats d'existence d'une limite d'une suite

Définition 1:

On appelle suite de nombres toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$: u : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{K} \\ n \mapsto u_n \end{array} \right.$

Notations : On note
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (u_n) ou u une suite d'élements de $\mathbb{K}$;
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 2:

1. On dit que (u_n) est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$;
2. On dit que (u_n) est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$ lorsque $\forall n \in \mathbb{K}, u_{n+1} = qu_n$.

Proposition 1

1.
   1. Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}$ est une suite arithmétique de raison r si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.
   2. Par propriété, si (u_n) est une telle suite alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = nr + u_0$.
   3. De plus, si (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = na + b$ alors (u_n) est arithmétique de raison a et de premier terme b.
2.
   1. Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}$ est une suite géométrique de raison q si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$.
   2. Par propriété, si (u_n) est une telle suite alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$.
   3. De plus, si (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = aq^n$ alors (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme a.

Définition 3:

Soient $a \in \mathbb{K} - \{1\}, b \in \mathbb{K}^*$. Une suite (u_n) est une suite linéaire d'ordre 1 si elle vérifie une relation de récurrence de ce type :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = au_n + b$$

Pour déterminer l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1, b \neq 0$.

- On cherche le point fixe ℓ en résolvant l'équation : $\ell = a\ell + b$.
- On pose $v_n = u_n - \ell$ et on montre que (v_n) est géométrique de raison a.
- On en déduit l'expression explicite de la suite de terme général v_n puis celle de terme général u_n.

Définition 4:

Soient $a \in \mathbb{K}^*, b \in \mathbb{K}$. Une suite (u_n) est dite linéaire d'ordre 2 si elle vérifie une relation de récurrence de ce type :

$$\forall n \in \mathbb{N}; au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.(*)$$

Proposition 2

Soit $r \in \mathbb{K}^*$. Alors la suite (r^n) vérifie la relation (*) si et seulement si r est solution de l'équation, dite caractéristique, $ax^2 + bx + c = 0$.

Proposition 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant la relation (*). Alors pour tout entier naturel n, la suite de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ vérifie encore (*), avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$.

Théorème 1

Soient $a \in \mathbb{R}^*; b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ et soit (u_n) une suite linéaire d'ordre 2 vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}; au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$.
On appelle $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique de la suite.

- Si (E) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors :
  $\exists(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
- Si (E) admet une racine unique r_0 alors :
  $\exists(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2\ /\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + n\mu) r_0^n$.
- Si de plus la suite est réelle et (E) n'admet pas de racines réelles, mais deux racines conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ alors :
  $\exists(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2\ /\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))$.

Exercice 1

[-M1-] Donner l'expression explicite de :

(a) $\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases}$.

(suite de Fibonacci).

(c) $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \end{cases}$.

Plan

1. Généralités

2. Comportement global d'une suite
   - Suites constantes, stationnaires et monotones
   - Monotonie d'une suite
   - Suites majorées, minorées, bornées
   - Les exercices du jour

3. Comportement asymptotique d'une suite

4. Résultats d'existence d'une limite d'une suite

Définition 5:

Une suite (u_n) est dite

1. constante si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$;
2. stationnaire (constante à partir d'un certain rang) si : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_{n+1} = u_n$.
3. périodique si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+q} = u_n$, avec $q \in \mathbb{N}$.

Définition 6:

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est :

1. croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$;
2. décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$;
3. monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante ;
4. strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone lorsque l'inégalité correspondante est stricte.

- Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on étudie le signe de l'expression $u_{n+1} - u_n$.
- Si (u_n) est à termes strictement positifs, on peut également étudier le signe de : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$. En effet : (u_n) croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$;

  (u_n) décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.

Définition 7:

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que : (u_n) est :

1. majorée par $M \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$;
2. minorée par $m \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$;
3. Une suite admettant au moins un majorant est dite majorée, une suite admettant au moins un minorant est dite minorée, une suite majorée et minorée est dite bornée.

Proposition 4

Soit (u_n) une suite réelle. Alors (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée.

Exercice 2

[-M2-] Étudier la monotonie des suites définies par : $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, $v_n = \dfrac{2^n}{n!}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

Plan

1. Généralités

2. Comportement global d'une suite

3. Comportement asymptotique d'une suite
   - Limite d'une suite réelle
   - Suites convergentes, suites divergentes
   - Opérations usuelles
   - Passage d'inégalités à la limite
   - Brève extension aux suites complexes
   - Les exercices du jour

4. Résultats d'existence d'une limite d'une suite

➩ Limite finie :

Définition 8:

On dit que (u_n) admet ℓ pour limite lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

REMARQUE : Le rang N à partir duquel $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ dépend de ε. On le note parfois N_ε ;

Proposition 5

Si (u_n) admet ℓ pour limite, alors ℓ est unique.

Proposition 6

Soit (u_n) une suite réelle. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$.

conséquence :

$\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

⇨ <u>Limite infinie :</u>

Définition 9:

On dit que (u_n) tend vers :

1. $+\infty$ lorsque : $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ u_n \geq A$;
2. $-\infty$ lorsque : $\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ u_n \leq -A$.

Notations : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.

Définition 10:

1. Une suite qui admet une limite finie est dite convergente ;
2. Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente ;
3. Deux suites sont de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Proposition 7

Toute suite convergente est bornée.

La réciproque est fausse : il existe des suites bornées qui ne convergent pas, par exemple $((-1)^n)$.

Notation : On notera dorénavant $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

Toutes les opérations usuelles vues dans le cadre des limites de fonctions sont valables dans le cadre des suites. En particulier :

Proposition 8

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que : (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge ver ℓ'. Alors la suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.

Proposition 9

Soient (u_n) et (v_n) deux suite de nombres réels telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ et $\forall n \geq N, u_n \leq v_n$. Alors : $\ell \leq \ell'$.

Lorsque l'on passe une inégalité stricte à la limite, l'inégalité devient large.

Définition 11:

On dit qu'une suite (u_n) à termes complexes converge vers $\lambda \in \mathbb{C}$ lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que : $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \lambda| = 0$.

Proposition 10

Soient (u_n) une suite complexe telle que $u_n = a_n + ib_n$ avec $\begin{cases} a_n \in \mathbb{R} \\ b_n \in \mathbb{R} \end{cases}$ et $\lambda = a + ib$, avec $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$. Nous avons équivalence entre :

- (i) (u_n) converge vers λ ;
- (ii) (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers a et b.

Proposition 11 Les opérations possibles ?

Soit (u_n) une suite complexe convergeant vers $u \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $\lim_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \overline{u}$;
2. $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |u|$.
3. Soit $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ convergente vers v.
   1. $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \left(\lambda u_n + \mu v_n\right)$ converge vers $\lambda u + \mu v$.
   2. $(u_n \times v_n)$ converge vers uv.
   3. si de plus (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et si sa limite est non nulle alors u/v converge vers u/v.

Exercice 3

[-M3-] En utilisant la définition de la limite, montrer que :
(a) $\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$, (b) $\lim_{n \to +\infty} e^{-1/n} = 1$.

Plan

1. Généralités

2. Comportement global d'une suite

3. Comportement asymptotique d'une suite

4. Résultats d'existence d'une limite d'une suite
   - Suites extraites
   - Théorèmes d'encadrement
   - Limites de suites monotones
   - Suites adjacentes
   - Les exercices du jour

Définition 12:

On appelle suite extraite de (u_n) toute suite (v_n) obtenue en ne prenant que certains éléments de (u_n), mais une infinité.

Proposition 12

Soit (u_n) une suite.

1. Si (u_n) admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de (u_n) admet ℓ pour limite ;
2. Si (v_n) et (w_n) telles que $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ admettent toutes deux la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) admet ℓ pour limite.

Théorème 2

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que :

(i) (v_n) et (w_n) convergent vers $\ell \in \mathbb{R}$;

(ii) Pour $n \geq N, v_n \leq u_n \leq w_n$.

Alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Théorème 3(Extension aux limites infinies)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$.

1. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$;
2. si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 4

1. Soit (u_n) une suite croissante. Alors :
   1. Si (u_n) est majorée, (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell$;
   2. Si (u_n) n'est pas majorée, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
2. Soit (u_n) une suite décroissante. Alors :
   1. Si (u_n) est minorée, (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \ell$;
   2. Si (u_n) n'est pas minorée, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Si (u_n) est croissante et majorée par 1, alors (u_n) converge, mais **pas forcément vers 1**. Elle peut converger vers un réel plus petit que 1.

Définition 13:

On dit que (a_n) et (b_n) sont adjacentes lorsque :

1. (i) (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante ;
2. (ii) $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Proposition 13

Deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite commune ℓ. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \ell \leq b_n$.

Exercice 4

[-M4-] Étudier la nature de la suite définie par : $u_n = \dfrac{n(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.
Préciser sa limite en cas d'existence.

Exercice 5

[-M4-] Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = n + \sin(n)$.

Exercice 6

[-M4-]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Justifier que (H_n) admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que nécessairement : $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 7

[-M4-]

1. Montrer que les suites définies pour $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n! \times n}$ sont adjacentes.
2. Montrons que e est irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. On admet que $\forall q \in \mathbb{N}, u_q < e < v_q$. En multipliant l'inégalité par $q!$, montrer que c'est impossible et conclure.

⋆ ⋆ ⋆

⋆ ⋆

⋆