Sommes et produits de nombres

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- M1 savoir calculer des sommes simples issues des suites géométriques et/ou arithmétiques ;
- M2 savoir reconnaitre un télescopage ;
- M3 savoir effectuer et utiliser un glissement d'indice ;
- M4 savoir manipuler les factorielles et coefficients binomiaux ;
- M5 savoir utiliser la formule du binome de Newton ;
- M6 savoir calculer des sommes doubles.

Dans tout le cours, on note : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Plan

Si $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, on note :

$$u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

REMARQUEs :

1. L'indice k de la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est une variable muette.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i;$$

2. En posant $I = [\![0;\ n]\!]$, on note également

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

⇨ Propriété de linéarité :

Proposition 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(a)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k;}$$

(b)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k.}$$

⇨ principe de télescopage :

Proposition 2

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_0.}$$

⇨ Somme des n premiers entiers naturels et suites arithmétiques :

Proposition 3

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0+1+2+..+n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

conséquence :

Suites arithmétiques.

- Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}$ est une suite arithmétique de raison r si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. Par propriété, si (u_n) est une telle suite alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = nr + u_0$. De plus, si (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = na + b$ alors (u_n) est arithmétique de raison a et de premier terme b.
- Si (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{K}$ ($\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{u_p + u_n}{2} \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nbre de termes}}.$$

⇨ Somme des termes d'une suite géométrique :

Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}$ est une suite géométrique de raison q si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$. Par propriété, si (u_n) est une telle suite alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$. De plus, si (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = aq^n$ alors (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme a.

Proposition 4

Si (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{K}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1 - q^{\overbrace{n-p+1}^{\text{nbre de termes}}}}{1-q};$$

- Si $q = 1$,

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \underbrace{(n-p+1)}_{\text{nbre de termes}} u_p.$$

Proposition 5

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 1

[M1] Calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^k$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}$; (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$;

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{3k+1}$; (e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}(5k+3^k)$.

Exercice 2

[M2] Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

Exercice 3

[M2]

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1;\ 0\}$, $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.
2. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en fonction de n.

Plan

Proposition 6

$\forall (a;\ b) \in \mathbb{K}^2$,

$$a^n - b^n = (a-b) \times \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}_{=a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}}.$$

Proposition 7

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n+r} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k;}$$

Proposition 8

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k$;
2. plus généralement, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{k+\ell} = \sum_{k=\ell}^{n+\ell} u_k$.

Exercice 4

[M1] Calculer $\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$.

Exercice 5

[M3] Calculer : $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k) + \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k+1)$.

Exercice 6

[M3] Calculer : $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+2}\right)$.

Plan

➪ Notation :

Si $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, on note :

$$u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

➪ Propriétés :

Proposition 9

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

1. $$\boxed{\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\prod_{k=0}^{n} v_k\right) = \prod_{k=0}^{n} (u_k v_k);}$$

2. Multiplication par un scalaire. Soit $\lambda \in K$:
$$\boxed{\prod_{k=0}^{n} \lambda u_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{n} u_k;}$$

3. Télescopage.
$$\boxed{\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0};}$$

4. Séparation d'un produit (Chasles) : $\boxed{\prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{k=0}^{m} u_k \prod_{k=m+1}^{n} u_k}$;

5. Glissement d'indice : $\boxed{\prod_{k=0}^{n} u_{k+\ell} = \prod_{k=\ell}^{n+\ell} u_k}$ avec $\ell \in \mathbb{N}$.

➩ Factorielle d'un nombre :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $n! = n \times (n-1) \times .... \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k$. Par convention, $0! = 1$.

Exemple : $1! = 1$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, $5! = 120$.

REMARQUE : $\forall n \in \mathbb{N}; (n+1)! = (n+1)n!$

$n!p! \neq (np)!$ (exemple : $2!3! = 12 \neq 6!$).

➩ Lien somme/produit :

Proposition 10

- $\ln\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k), \quad (u_0 > 0,\ u_1 > 0,\ \ldots,\ u_n > 0).$
- $\exp\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \prod_{k=0}^{n} \exp(u_k).$

But : Calculer : $\displaystyle\sum_{(i;\ j)\in[\![0;\ n]\!]^2} a_{ij}$, avec $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Par exemple : $\displaystyle\sum_{(i;\ j)\in[\![0;\ n]\!]^2} (i+j)$.

Proposition 11

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{(i;\ j)\in[\![0;\ n]\!]^2} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\right).$$

conséquence :

Si $a_{ij} = u_i v_j$ (variables séparables), alors nous en déduisons :

$$\sum_{(i;\ j)\in[\![0;\ n]\!]^2} u_i v_j = \left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right) = \left(\sum_{j=0}^{n} v_j\right)\left(\sum_{i=0}^{n} u_i\right).$$

But : Calculer : $\sum_{(i;\ j)\in T} a_{ij}$, où $T = \left\{(i;\ j) \in [\![0;\ n]\!]^2 \ /\ j \leq i\right\}$ et $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Par exemple : $\sum_{(i;\ j)\in T} 2^{i+j}$.

Proposition 12

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{(i;\ j)\in T} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} a_{ij} \right).$$

Exercice 7

[M4] Exprimer simplement à l'aide de factorielles les produits suivants :

(a) $\displaystyle\prod_{k=4}^{n} k\,;$

(b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^2;$

(c) $\displaystyle\prod_{k=3}^{n} k^2;$

(d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (k+2).$

Exercice 8

[M4] On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k$ et $I_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$. Calculer P_n et en déduire I_n.

Exercice 9

[M1] Calculer : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} e^k$.

Exercice 10

[M6] Calculer $\displaystyle\sum_{(i;\ j)\in[\![1;\ n]\!]^2} ij$.

Exercice 11

[M6] Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}$.

Plan

Définition 1:

Pour $(n;\ p) \in \mathbb{N}^2$, on appelle coefficients binomiaux, et on note : $\binom{n}{k}$ les nombres définis par :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \text{ si } p \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Proposition 13

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

1. pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$;
2. $\dbinom{n}{0} = 1$, $\dbinom{n}{1} = n$.

Proposition 14

Soient $(n\,;p) \in \mathbb{N}^2$. Alors : $\displaystyle \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$.

Interprétation graphique :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0	0	0	0	0	...
1	1	$\overbrace{1}^{\nwarrow + \uparrow}$	0	0	0	0	...
2	1	$\overbrace{2}^{\nwarrow + \uparrow}$	1	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	...
5	1	5	10	10	5	1	...

Le triangle de Pascal

conséquence :

- Les coefficients binômiaux sont des entiers naturels.

Proposition 15

Soient $(a;\ b) \in \mathbb{K}^2$. Alors : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

REMARQUE : Nous avons également : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$ car $(a+b)^n = (b+a)^n$.

Exercice 12

[M5] Donner une expression simple des sommes suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$;

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$; (d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^k \binom{n}{k}$;

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$; (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.