

Sommes et produits de nombres

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

Dans tout le cours, on note : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Plan

1 Généralités et propriétés des sommes

- Notation et premières propriétés
- Quelques sommes usuelles
- Propriétés supplémentaires

2 Sommes doubles et produits

3 La formule du binôme

⇒ notation :

Si $u_0, u_1, \dots, u_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, on note : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

REMARQUES :

(1) L'indice k de la somme $\sum_{k=0}^n u_k$ est une variable muette.

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i;$$

(2) En posant $I = \llbracket 0; n \rrbracket$, on note également

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=0}^n a_i.$$

⇒ propriété de linéarité :

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

(a)

$$\sum_{k=0}^n (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n v_k;$$

(b)

$$\sum_{k=0}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^n u_k.$$

⇒ principe de télescopage :

Proposition

Soit (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

Exercice

Calculer : $\sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right).$

⇒ somme des n premiers entiers naturels et suites arithmétiques :

Proposition

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 + 1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$



conséquence :

- Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}$ est une suite arithmétique de raison r si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. Par propriété, si (u_n) est une telle suite alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = nr + u_0$. De plus, si (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = na + b$ alors (u_n) est arithmétique de raison a et de premier terme b .
- Si (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\forall (n; p) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=p}^n u_k = \frac{u_p + u_n}{2} \underbrace{(n - p + 1)}_{\text{nbre de termes}}.$$

REMARQUE : En particulier : $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{u_0 + u_n}{2} \underbrace{(n + 1)}_{\text{nbre de termes}}.$

⇒ somme des termes d'une suite géométrique :

Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}$ est une suite géométrique de raison q si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$. Par propriété, si (u_n) est une telle suite alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \times u_0$. De plus, si (u_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = aq^n$ alors (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme a .

Proposition

Si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$ et de premier terme $u_0 \in \mathbb{K}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{\overbrace{n+1}^{\text{nbre de termes}}}}{1 - q};$$

- Si $q = 1$,

$$\sum_{k=0}^n u_k = \underbrace{(n+1)}_{\text{nbre de termes}} u_0.$$

Exercice

Calculer les sommes suivantes :

(a) $\sum_{k=0}^n e^k$;

(b) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$

(c) $\sum_{k=0}^n (5k + 3^k)$;

(d) $\sum_{k=3}^n 2^k, (n \geq 3)$.



conséquence :

$$\forall (a; b) \in \mathbb{K}^2,$$

$$a^n - b^n = (a - b) \times \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k}_{=a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}}.$$

⇒ relation de Chasles :

Proposition

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+r} u_k = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{n+r} u_k.$$

⇒ glissement d'indice :

Proposition

❶
$$\sum_{k=0}^n u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = u_1 + \dots + u_{n+1};$$

❷ plus généralement, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n u_{k+\ell} = \sum_{k=\ell}^{n+\ell} u_k.$$

Plan

- 1 Généralités et propriétés des sommes
- 2 Sommes doubles et produits
 - Produits de nombres
 - Les doubles sommes
- 3 La formule du binôme

⇒ notation :

Si $u_0, u_1, \dots, u_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$, on note :

$$u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = \prod_{k=0}^n u_k.$$

⇒ propriétés :

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

$$\textcircled{1} \quad \left(\prod_{k=0}^n u_k \right) \left(\prod_{k=0}^n v_k \right) = \prod_{k=0}^n (u_k v_k);$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Multiplication par un scalaire. Soit } \lambda \in \mathbb{K} : \quad \prod_{k=0}^n \lambda u_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^n u_k;$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Télescopage.} \quad \prod_{k=0}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0};$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Séparation d'un produit (Chasles) :} \quad \prod_{k=0}^n u_k = \prod_{k=0}^m u_k \prod_{k=m+1}^n u_k;$$

$$\textcircled{5} \quad \text{Glissement d'indice :} \quad \prod_{k=0}^n u_{k+\ell} = \prod_{k=\ell}^{n+\ell} u_k \text{ avec } \ell \in \mathbb{N}.$$

⇒ factorielle d'un nombre :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 1 = \prod_{k=1}^n k$. Par convention, $0! = 1$.



| $n!p! \neq (np)!$ (exemple : $2!3! = 12 \neq 6!$).

Exercice

Exprimer simplement à l'aide de factorielles les produits suivants :

(a) $\prod_{k=1}^n 2k;$

(c) $\prod_{k=1}^n (k + 2).$

(b) $\prod_{k=4}^n k;$

⇒ lien somme/produit :

Proposition

- $\ln \left(\prod_{k=0}^n u_k \right) = \sum_{k=0}^n \ln(u_k), \quad (u_0 > 0, u_1 > 0, \dots, u_n > 0).$
- $\exp \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) = \prod_{k=0}^n \exp(u_k).$

Exercice

Calculer : $\prod_{k=0}^n e^k.$

⇒ sommes rectangulaires :

But : Calculer : $\sum_{(i; j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2} a_{ij}$, avec $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Par exemple : $\sum_{(i; j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2} (i+j)$.

Proposition

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{(i; j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2} a_{ij} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^n a_{ij} \right).$$



conséquence :

Si $a_{ij} = u_i v_j$ (variables séparables), alors nous en déduisons :

$$\sum_{(i; j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2} u_i v_j = \left(\sum_{i=0}^n u_i \right) \left(\sum_{j=0}^n v_j \right) = \left(\sum_{j=0}^n v_j \right) \left(\sum_{i=0}^n u_i \right).$$

⇒ sommes triangulaires :

But : Calculer : $\sum_{(i; j) \in T} a_{ij}$, où $T = \left\{ (i; j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 / \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq i \end{array} \right\} \right\}$ et $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Par exemple : $\sum_{(i; j) \in T} 2^{i+j}$.

Proposition

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{(i; j) \in T} a_{ij} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=j}^n a_{ij} \right).$$

Exercice

Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}$.

Plan

- 1 Généralités et propriétés des sommes
- 2 Sommes doubles et produits
- 3 La formule du binôme
 - Coefficients binômiaux
 - Le triangle de Pascal
 - Formule du binôme de Newton et applications

Définition :

Pour $(n; p) \in \mathbb{N}^2$, on appelle coefficients binomiaux, et on note : $\binom{n}{p}$ les nombres définis par :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \frac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

- 1 pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$;
- 2 $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

Proposition

Soient $(n ; p) \in \mathbb{N}^2$. Alors :
$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}.$$

Interprétation graphique :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	...
5	1	5	10	10	5	1	...
Le triangle de Pascal							



conséquence :

Les coefficients binômiaux sont des entiers naturels.

⇒ formule du binôme de Newton :

Proposition

Soient $(a; b) \in \mathbb{K}^2$. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

REMARQUE : Nous avons aussi $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$ car $(a + b)^n = (b + a)^n$.

Exercice

Donner une expression simple des sommes suivantes :

$$(a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k};$$

$$(b) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k};$$

$$(c) \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k};$$

$$(d) \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^k \binom{n}{k};$$

$$(e) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx);$$

$$(f) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx).$$