

Séries numériques

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- ❖1 Savoir étudier la convergence d'une série à termes positifs.
- ❖2 Prouver la convergence ou la divergence d'une série en la comparant à une intégrale.

Plan

- 1 Généralités
 - Séries convergentes
 - Séries grossièrement divergentes
 - Reste d'une série convergente
 - Propriétés
- 2 Cas des séries à termes positifs
- 3 Séries de référence
- 4 Plan d'étude et exemples
- 5 Les exercices du jour

Définition 1:

- ❶ Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs réelles ou complexes. On appelle série de terme général u_n , et on note $\sum u_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

- ❷ Si la suite (S_n) converge, alors on dit que la série converge. Dans ce cas la limite ℓ de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée :

$$\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

- ❸ Si la série $\sum U_n$ ne converge pas on dit qu'elle est divergente.

REMARQUE :

Dans le cas où les (u_n) sont définis uniquement à partir de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ la série de terme général u_n est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$. Les sommes partielles sont elles aussi définies à partir du rang n_0 par la

relation : $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$. En cas d'existence, la somme de la série est notée : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 1

■ Si une série $\sum u_n$ converge alors (u_n) converge vers 0.

Si $\sum u_n$ converge, alors par définition, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ . Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell$. Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$. Or $S_n - S_{n-1} = u_n$, ce qui prouve que (u_n) converge vers 0.



La réciproque est fausse ! En effet, le terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0. Pourtant la série associée tend vers $+\infty$ (Série harmonique)

Définition 2:

Si (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple : $\sum \ln(n)$ diverge grossièrement.

Définition 3:

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On appelle reste d'ordre n , et on note R_n la grandeur : $R_n = \ell - S_n$ où : $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Proposition 2

Avec les notation de la définition ci-dessus :

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$;

• R_n est la somme de la série $\sum_{N \geq n+1} u_N$ c'est à dire :

$$R_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N u_k = \sum_{N=n+1}^{+\infty} u_k.$$

⇒ Linéarité :

Proposition 3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Alors

❶ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum \lambda u_n$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

❷ La série $\sum (u_n + v_n)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.



En revanche, la somme de deux séries divergentes n'est pas forcément divergente. (Par exemple en faisant la différence d'une série divergente avec elle même)

⇒ Séries télescopiques :

Proposition 4

Soit (v_n) une suite à valeurs réelles ou complexes. Alors $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si la suite (v_n) converge. De plus, en cas de convergence $\sum_{n=0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0$.

La somme partielle associée à $\sum (v_{n+1} - v_n)$ est $S_n = \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_0$.

Ainsi (S_n) si et seulement si (v_{n+1}) converge et (v_{n+1}) converge si et seulement si (v_n) converge, d'où le résultat.

Par ailleurs, en cas de convergence, vu que (v_{n+1}) a la même limite que (v_n) , nous avons bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - v_0$, ce qui prouve le deuxième point.

Plan

- 1 Généralités
- 2 Cas des séries à termes positifs
 - Principe de majoration
 - Théorèmes de comparaison
- 3 Séries de référence
- 4 Plan d'étude et exemples
- 5 Les exercices du jour

Proposition 5

| Soit (u_n) une suite positive. Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Sinon $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$.

⇒ Comparaison par domination :

Proposition 6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives et telles que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n$.

❶ si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

❷ si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T_n$. Ainsi,

- ❶ Si $\sum v_n$ converge, alors (T_n) converge. Or une suite convergente est bornée donc majorée. Ainsi, si l'on note M un de ses majorants : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T_n \leq M$. D'où (S_n) est majorée est donc converge, son terme général étant positif (cf. proposition ci-dessus).
- ❷ Si $\sum u_n$ diverge, nécessairement, toujours car son terme général est positif, S_n tend vers $+\infty$ (cf. proposition ci-dessus). Par encadrement, (T_n) tend vers $+\infty$, ce qui prouve que $\sum v_n$ diverge.

⇒ Comparaison par équivalence :

Proposition 7

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \sim v_n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$.
Alors $\sum u_n$ converge si et seulement $\sum v_n$ converge.

Plan

- 1 Généralités
- 2 Cas des séries à termes positifs
- 3 Séries de référence
 - Séries géométriques
 - Série exponentielle
 - Séries de Riemann
- 4 Plan d'étude et exemples
- 5 Les exercices du jour

Théorème 1

La série (dite géométrique) $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. De plus, en cas de convergence :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Proposition 8

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente et a pour somme e^z :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Théorème 2

| Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la série (dite série de Riemann) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Plan

- 1 Généralités
- 2 Cas des séries à termes positifs
- 3 Séries de référence
- 4 Plan d'étude et exemples
- 5 Les exercices du jour

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Pour étudier la nature de cette série :

- ❶ On commence par vérifier si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. si tel n'est pas le cas, on sait que la série est grossièrement divergente et cela achève de la série. Sinon, on poursuit :
- ❷ On vérifie que (u_n) est à termes positifs, si tel n'est pas le cas on attend la seconde année pour avoir des outils d'études de ce genre de séries.
- ❸ Si (u_n) est directement une série de référence, on peut conclure directement. Sinon, on a deux axes :
 - ▶ On majore/minore u_n par un terme général de série de référence pour conclure à l'aide du principe de majoration.
 - ▶ On recherche un équivalent de (u_n) que l'on note v_n . Par propriété, les deux séries sont de même nature. Nous avons donc deux possibilités : soit v_n est directement un terme général de série de référence et on peut alors conclure, soit il faut encore majorer/minorer (v_n) pour conclure.

ExempleS :

- ❶ Étude de la convergence de $\sum \frac{n^2 + n}{(n^2 + 1)2^n}$.
- ❷ Étude de la convergence de $\sum \frac{1}{(n^2 + 1)2^n}$.

Plan

- 1 Généralités
- 2 Cas des séries à termes positifs
- 3 Séries de référence
- 4 Plan d'étude et exemples
- 5 Les exercices du jour

Exercice 1

[- M1 -]

Montrer que la série $\sum \frac{1}{kk!}$ est convergente.

Exercice 2

[- M1 -] Pour tout entier $n > 0$ on pose : $u_n = \frac{1}{n^2+2n}$.



Déterminer deux constantes réelles α et β telles que

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+2}.$$



En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et donner sa somme.

Exercice 3

[- M1 -] Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\textcircled{Q1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^{2n+3}};$$

$$\textcircled{Q2} \sum e^{-n};$$

$$\textcircled{Q3} \sum \frac{e^{-n}}{n};$$

$$\textcircled{Q4} \sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$\textcircled{Q5} \sum (\cos(1/n) - 1);$$

$$\textcircled{Q6} \sum \frac{\text{Arctan}(n)}{n^2 + 1};$$

$$\textcircled{Q7} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)+2}{n^2};$$

$$\textcircled{Q8} \sum_{n \geq 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right) \right);$$

$$\textcircled{Q9} \sum (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1});$$

$$\textcircled{Q10} \sum n^2 e^{-n}.$$

Exercice 4

[- M2 -] En vous aidant d'une comparaison série/intégrale, montrer que

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)} \text{ diverge.}$$

Exercice 5

[- M1 -]

On note pour $x \neq 1$, $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

- ❶ Donner deux expressions de la dérivée de f .
- ❷ En déduire que $\sum nx^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. Donner la somme de la série.
- ❸ En déduire que $\sum \frac{n}{2^n}$ converge et donner sa somme.