

Probabilités sur un univers fini

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

Plan

- 1 Modéliser une expérience aléatoire
 - Expérience aléatoire
 - Univers d'une expérience aléatoire
 - Évènements associés à une expérience aléatoire
- 2 Espaces probabilisés
- 3 Conditionnement
- 4 Indépendance

On désigne par expérience aléatoire toute expérience dont le résultat est soumis au hasard, mais dont toutes les issues sont connues. Ainsi, la même expérience soumise aux mêmes conditions peut donner des résultats différents.

Exemples :

- (1) On lance une pièce de monnaie en l'air puis on observe la face visible lorsqu'elle retombe.
- (2) On lance un dé à six faces et on observe la face visible.
- (3) On lance simultanément deux pièces de monnaie différentes et on observe les faces visibles.

Définition :

On appelle univers associé à une expérience aléatoire l'ensemble de tous ses résultats possibles.

Notation : On note souvent Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

Nous ne considérerons dans ce chapitre que des expériences aléatoires dont l'univers est fini.

⇒ Définition et premières propriétés :

Définition :

On appelle évènement associé à une expérience aléatoire tout sous-ensemble de son univers Ω .

L'ensemble des évènements est donc ici $\mathcal{P}(\Omega)$, c'est à dire l'ensemble des parties de Ω .

⇒ Exemple :

On lance un dé à six faces et on observe la face visible. Nous avons $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Si $\Omega = \{w_1; w_2; \dots; w_n\}$ est l'univers (fini) associé à une expérience aléatoire,

- Les singletons $\{w_i\}$, avec $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ seront appelés les évènements élémentaires ;
- Ω sera appelé l'évènement certain.
- $\emptyset$ sera appelé l'évènement impossible.

⇒ Définition et premières propriétés :

À partir de deux évènements A et B , nous pouvons obtenir d'autres évènements :

Écriture logique	Écriture ensembliste
Le contraire de A s'est réalisé A ou B se sont réalisés A et B se sont réalisés B s'est réalisé mais pas A	

On dira que les évènements A et B sont incompatibles lorsque A et B ne peuvent se réaliser simultanément, c'est à dire lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Exemples :

- (1) Les évènements « le résultat est pair » et « le résultat est impair »
- (2) Les évènements « le résultat est un nombre plus petit que 4 » et « le résultat est un nombre plus grand que 4 »

⇒ Système complet d'évènements :

Définition :

Soit Ω l'univers associée à une expérience aléatoire et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des évènements. On dit que la famille $\mathcal{F} = (A_1, \dots, A_n)$ forme un système complet d'évènements lorsque :

- (i) les évènements de la famille sont deux à deux incompatibles, c'est à dire lorsque :

$$\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

(ii) $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i.$

REMARQUE : Si $\Omega = \{w_1; \dots; w_n\}$, alors les évènements élémentaires $\{w_i\}$ forment un système complet d'évènements.

Plan

- 1 Modéliser une expérience aléatoire
- 2 Espaces probabilisés
 - Présentation
 - Propriétés
 - Probabilité uniforme
- 3 Conditionnement
- 4 Indépendance

- (a) Pour estimer les chances de réalisation d'un évènement, on utilise un nombre compris entre 0 et 1 lié à la fréquence de réalisation de l'évènement A lorsqu'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire.
- (b) Les nombres précédemment introduits devront par ailleurs avoir un lien entre eux.

Définition :

Soit Ω un univers fini associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des évènements. Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) $\forall (A; B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$
- (ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1.$

On dira alors que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini.

Proposition

Soient $\Omega = \{w_1; w_2; \dots; w_n\}$ un univers fini associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des évènements. Si $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont des nombres positifs de somme 1, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}(\{w_i\}) = p_i$.

Exemple : On lance une fois une pièce de monnaie truquée de sorte qu'il y ait deux fois plus de chances de tomber sur PILE que sur FACE.

⇒ passage au complémentaire :

Proposition

(a)

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

(b)

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

⇒ croissance :

Proposition

Soient A et B deux évènements tels que $A \subset B$. Alors : $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

⇒ probabilité et évènements deux à deux incompatibles :

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $\mathcal{F} = (A_1, \dots, A_n)$ des évènements deux à deux incompatibles. Alors : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$.

⇒ probabilité de la réunion de deux ensembles :

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A et B deux évènements.
Alors : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Définition :

Si Ω est un univers associé à une expérience aléatoire, la probabilité uniforme est la probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0; 1]$ définie par $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

REMARQUES :

- (1) Il s'agit bien d'une probabilité d'après les propriétés du cardinal.
- (2) En particulier, si $\{w\}$ est un évènement élémentaire, $\mathbb{P}(\{w\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

Exercice

On lance deux dés non pipés de couleurs différentes et on regarde le total obtenu. Décrire l'espace probabilisé adapté à cette expérience puis calculer la probabilité que la somme des numéros soit inférieure ou égale à 5.

Exercice

On lance 15 fois une même pièce équilibrée et on regarde le résultat obtenu. Décrire l'espace probabilisé et calculer la probabilité d'obtenir exactement trois PILE.

Exercice

Une urne contient une boule noire, deux boules rouges et sept boules blanches. A chaque nouvelle expérience, préciser quel espace probabilisé peut la modéliser.

- ① On pioche trois boules simultanément de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches ? deux boules rouges ? Quelle est la probabilité d'obtenir les trois couleurs ?
- ② On pioche simultanément n boules de l'urne ($1 \leq n \leq 10$). Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? au moins une rouge ?
- ③ On pioche trois fois de suite une boule de l'urne en notant sa couleur puis en la remettant dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir les trois couleurs ?
- ④ On pioche n fois de suite une boule de l'urne ($n \in \mathbb{N}^*$) en la remettant à chaque fois dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

Plan

- 1 Modéliser une expérience aléatoire
- 2 Espaces probabilisés
- 3 Conditionnement
 - Présentation
 - Probabilités totales et composées
 - Formule de Bayes
- 4 Indépendance

⇒ Exemples introductifs :

⇒ Définition et propriété :

Définition :

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel, noté $\mathbb{P}(A|B)$, tel que : $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Proposition

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors l'application $\mathbb{P}_B$, qui à tout événement A associe $\mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur Ω .



conséquence :

$$\xi \quad \mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) - \mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2).$$

⇒ probabilités composées :

Théorème

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $A_1, A_2, \dots, A_n$ n évènements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$. Alors :

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)}_{=\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n)} = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exercice

Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules. Si on tire une boule noire, on l'enlève et si on tire une boule blanche, on la retire et on la remplace par une noire. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules blanches ?

⇒ probabilités totales :

Théorème

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'évènements. Alors pour tout évènement B , nous avons :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k).$$



conséquence :

Si A est un évènement de probabilité non nulle, alors $(\underbrace{A}_{=A_1}, \underbrace{\bar{A}}_{=A_2})$ forme un système complet d'évènements, et la formule s'écrit alors :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}).$$

Exercice

On utilise deux pièces de monnaie : l'une pipée, de sorte que lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir pile soit $1/4$; l'autre normale dont la probabilité d'obtenir pile est $1/2$ à chaque lancer. On prend une pièce au hasard (chacune des deux pièces a une probabilité $1/2$ d'être prise)

- ① Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
- ② On a obtenu pile : quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée ?

Théorème

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ un système complet d'évènements avec $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Alors pour tout évènement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, nous avons :

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}.$$

Exercice

On a n sacs $S_1, \dots, S_n$. Le sac S_k contient k jetons blancs et $n+1-k$ rouges. On choisit un sac et on tire un jeton dans le sac choisi. Le jeton est rouge. Quelle est la probabilité qu'il vienne du sac S_k ?

Plan

- 1 Modéliser une expérience aléatoire
- 2 Espaces probabilisés
- 3 Conditionnement
- 4 Indépendance
 - Présentation
 - Propriétés
 - Indépendance mutuelle

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A et B deux évènements. On dit que A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.



conséquence :



Si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ (avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$).

Exercice

On lance un dé honnête et on considère les deux évènements : A « on obtient un multiple de 3 » et B « on obtient un résultat pair ». A et B sont-ils indépendants ?

Proposition

- ❶ Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- ❷ Si A et B sont incompatibles et de probabilités non nulles, alors A et B ne sont pas indépendants.

Définition :

Soit n un entier supérieur ou égal à deux et $A_1, A_2, \dots, A_n$ n évènements. Les évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dits :

- ① deux à deux indépendants lorsque les évènements A_i et A_j sont indépendants pour $i \neq j$.
- ② mutuellement indépendants lorsque pour tout sous-ensemble I de

$$\llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P} \left(\bigcap_{k \in I} A_k \right) = \prod_{k \in I} \mathbb{P}(A_k).$$

Exercice

On considère une famille avec deux enfants et on suppose que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille est de $\frac{1}{2}$. On note A « la famille a un garçon et une fille », B « l'enfant aîné est une fille » et C « le cadet est un garçon ». Montrer que A , B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.