

Primitives et équations différentielles linéaires d'ordre 1

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- MI1 Maîtriser le calcul de primitives ;
- MI2 Réaliser une intégration par parties ;
- MI3 Faire un changement de variable ;
- MI4 Résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients quelconques ;

Plan

1 Primitives et intégrales

- Ensemble des primitives d'une fonction continue
- Intégrale d'une fonction continue
- Lien entre intégrale et primitive
- Les exercices du jour

2 Techniques de calculs de primitives et d'intégrales

3 Calculs d'intégrales usuelles

4 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients quelconques

Définition 1:

On appelle primitive de f sur un ensemble D toute fonction F dérivable sur D et telle que pour tout $x \in D$, $F'(x) = f(x)$.

Proposition 1

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Alors :

- 1 Pour tout réel C , $G = F + C$ est une primitive de f sur I ;
- 2 Réciproquement, si G est une primitive de f , il existe un réel C tel que : $\forall x \in I, G(x) = F(x) + C$.

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Domaine de validité
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ $\frac{1}{x}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\ln(x)$	$]0; +\infty[$ $] - \infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$

Fonction $f(x)$	Une primitive $F(x)$	Domaine de validité
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[; k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\text{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\text{Arcsin}(x)$	$] -1; 1[$

⇒ Cas des fonctions à valeurs réelles :

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et à valeurs positives, on note $\int_a^b f(t) dt$

(ou $\int_a^b f$) l'aire de la figure :

- située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f ;
- délimitée par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et à valeurs négatives, on note $\int_a^b f(t) dt$

(ou $\int_a^b f$) l'opposé de la valeur de l'aire de la figure :

- située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f ;
- délimitée par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ et à valeurs réelles, $\int_a^b f(t) dt$ représentera le nombre réel obtenu en faisant la différence de la valeur de l'aire associée aux valeurs où f est positive avec l'aire associée aux valeurs de f négatives.

- Pour $b < a$, on pose par convention, $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$.
- Si $b = a$, on pose par convention $\int_a^b f(t) dt = 0$.

⇒ Cas des fonctions à valeurs complexes :

Si f est une fonction de la variable réelle à valeurs complexes et $u = \operatorname{Re}(f)$ et $v = \operatorname{Im}(f)$ sont continues, on définit l'intégrale de f sur $[a; b]$ en posant :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Théorème 1 Fondamental de l'analyse dit de Newton-Leibniz

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a . Plus précisément :

- $F(a) = 0$.
- F est de classe C^1 sur I et vérifie de plus : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.



conséquences :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et soit F une primitive de f sur $[a; b]$. Alors

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b,$$

où l'on note $[F(x)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$.

Exercice 1

[-M1-] Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_1^6 t^2 dt; & \text{(b)} \int_1^4 \sqrt{t} dt; & \text{(c)} \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} dt; \\ \text{(d)} \int_0^4 x\sqrt{x} dx; & \text{(e)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x) dx; & \text{(f)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2(x) dx. \end{array}$$

Plan

- 1 Primitives et intégrales
- 2 Techniques de calculs de primitives et d'intégrales
 - Linéarité
 - Primitives de formes usuelles
 - Intégration par parties
 - Formule de changement de variable
 - Les exercices du jour
- 3 Calculs d'intégrales usuelles
- 4 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients quelconques

Proposition 2(linéarité)

- ❶ Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et F et G sont deux primitives respectives de f et g , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- ❷ Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$



On n'obtient pas la primitive d'un produit (ou d'un quotient) en faisant le produit (ou le quotient) des primitives de chaque fonction !! Par exemple une primitive de $\frac{1}{x^2}$ n'est pas $\frac{x}{\frac{x^3}{3}} = \frac{3}{x^2}$.

Proposition 3

Soient :

- f une fonction continue sur un intervalle J ;
- F une primitive f sur J ;
- u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $F \circ u$ ait un sens.

Alors : $F \circ u$ est une primitive de $u' \times f \circ u$.

REMARQUE : Nous avons en particulier le tableau suivant :

La fonction u est dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Une primitive sur I
$u' u^\alpha$, avec $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha + 1} u^{\alpha+1}$
$\frac{u'}{u}$ la fonction u $\frac{u'}{u}$ ne s'annule pas sur I	$F = \ln u $
$u' e^u$	e^u
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' f(u)$ (f continue)	$F(u)$ (F primitive de f)

Définition 2:

On dit qu'une fonction f définie sur D est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D lorsque f est dérivable sur D et f' continue.

REMARQUE : Toutes les fonctions usuelles vues en début d'année sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur domaine de dérivabilité.

Proposition 4(intégration par parties)

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Proposition 5

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle J et à valeurs dans $[a; b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

avec $\varphi(t_0) = a$ et $\varphi(t_1) = b$

Exercice 2

[-M1-] Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle proposé :

(a) $\frac{1}{x+1}$ sur $I =]-1; +\infty[$;

(b) $\frac{1}{(1+x)^2}$ sur $I =]-1; +\infty[$;

(c) $\frac{x}{1+x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$;

(d) $\frac{1}{(2x+1)^3}$ sur $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$;

(e) $\sqrt{2x+1}$ sur $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$;

(f) $\sin(\omega x + \varphi)$ avec $\omega \neq 0$. $I = \mathbb{R}$;

(g) $\sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

[-M2-] Calculer :

(a) $\int_0^1 x e^x dx$; (b) $\int_0^1 \operatorname{Arctan}(x) dx$.

Plan

- 1 Primitives et intégrales
- 2 Techniques de calculs de primitives et d'intégrales
- 3 Calculs d'intégrales usuelles
 - Intégrales de fonctions trigonométrique
 - Intégrales de fonctions rationnelles
 - Les exercices du jour
- 4 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients quelconques

⇒ Intégrales de la forme $\int_a^b \cos(t)e^{\alpha t} dt$, :

Pour calculer une primitive de $x \mapsto e^x \cos(2x) dx$ par exemple, on se place dans $\mathbb{C}$, on y effectue les calculs puis on prend la partie réelle.

⇒ Intégrales de la forme $\int_a^b \cos^m(t) \sin^n(t) dt, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} :$

- Si m est impair, on pourra reconnaître une forme usuelle $u'f(u)$.
- Si n est impair, on pourra également reconnaître une forme usuelle $u'f(u)$.
- Si m et n sont pairs, on linéarise.

On cherche une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ avec $a \neq 0; b, c \in \mathbb{R}$ sur un intervalle I sur lequel f est bien définie. Trois cas se présentent. Notons Δ le discriminant du dénominateur.

⇒ Calcul lorsque $\Delta > 0$:

Notons x_1 et x_2 les deux solutions réelles de $ax^2 + bx + c$.

Proposition 6 Décomposition en éléments simples.

Soit I un intervalle ne contenant pas les racines de $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Alors, il existe deux réels $\lambda; \mu$ tels que pour tout $x \in I$:

$$\frac{1}{a(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{\lambda}{x - x_1} + \frac{\mu}{x - x_2}$$



conséquence :

§ par linéarité, une primitive de f est donc $\lambda \ln |x - x_1| + \mu \ln |x - x_2|$.

⇒ Calcul lorsque $\Delta = 0$:

Notons x_0 l'unique solution de $f(x) = 0$. Dans ce cas, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{a(x-x_0)^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{a(x-x_0)}$.

⇒ Calcul lorsque $\Delta < 0$:

- On commence par mettre le trinôme sous forme canonique :
 $ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$. Comme $\Delta < 0$, nous avons en fait :
 $ax^2 + bx + c = a[(x - x_0)^2 + \lambda^2]$ avec $\lambda = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Par changement de variable $t = x - x_0$ on se ramène alors à déterminer une primitive de : $\frac{1}{x^2 + \mu^2}$.

Proposition 7

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$: $\frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x}{a} \right)$ est une primitive de $\frac{1}{x^2 + a^2}$.

Exercice 4

Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t) dt = 3\pi/16$$

Exercice 5

Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$ puis $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1} dx$.

Exercice 6

[-M3-] Calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$ en posant $u = e^x$.

Plan

- 1 Primitives et intégrales
- 2 Techniques de calculs de primitives et d'intégrales
- 3 Calculs d'intégrales usuelles
- 4 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients quelconques
 - Vocabulaire
 - Résolution de l'équation normalisée
 - Équations de la forme $\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$
 - Les exercices du jour

Définition 3:

- ❶ On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation de la forme : $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$, avec α, β, γ continues sur un ensemble D ;
- ❷ Si de plus $\forall x \in D, \alpha(x) = 1$, on dit que l'équation est normalisée.

⇒ Équation homogène :

Définition 4:

On appelle équation homogène associée à l'équation différentielle (E) $y' + a(x)y = b(x)$ l'équation :

$$(E_H) \quad y' + a(x)y = 0.$$

Théorème 2

Soit $(E_H) : y'(x) + a(x)y(x) = 0$, avec a continue sur un intervalle I . Alors :

$$S_H = \left\{ Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R} \right\},$$

où A est une primitive de a sur I quelconque.

⇒ Recherche de solutions particulières par la variation de la constante :



Les résultats vus précédemment sur la recherche de solutions particulières de solutions de la forme polynôme $\times$ exponentielle etc... **ne s'appliquent pas** lorsque l'équation différentielle **n'est pas à coefficients constants**.

Elle permet de déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E) $y' + a(x)y = b(x)$. On rappelle que : $S_H = \{Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\}$, où A est une primitive de a sur I .

Le principe est le suivant : on cherche une solution particulière de $y' + a(x)y(x) = b$ de la forme : $y_P(x) = C(x)e^{-A(x)}$ (c'est à dire de forme similaire aux solutions de l'équation homogène mais avec C que l'on ne suppose plus constant, d'où le nom de la méthode).

On détermine C en utilisant que y_P est solution de (E). Ceci entraîne donc :

$$\begin{aligned} y_P'(x) + a(x)y_P(x) &= b(x) \\ \Leftrightarrow C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)C(x)e^{-A(x)} &= b(x) \\ \Leftrightarrow C'(x) &= b(x)e^{A(x)}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une expression de $C(x)$ en déterminant une primitive de

⇒ Synthèse :

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme $y'(x) + a(x)y(x) = g(x)$, on procède comme suit :

- on résout l'équation différentielle homogène associée ;
- on détermine une solution particulière de l'équation différentielle complète avec la méthode de variation de la constante ;
- Les solutions de l'équation différentielle complète sont alors les fonctions qui s'écrivent comme somme de la solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

⇒ Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale :

Proposition 8

Soit (E) $y' + a(x)y = b(x)$, avec a et b continues sur un intervalle I . Il existe une unique solution y de (E) telle que $y(x_0) = m_0$, avec $(x_0; m_0) \in I \times \mathbb{R}$.

On se ramène à la résolution d'une équation de la forme $y'(x) + a(x)y(x) = g(x)$ sur chaque intervalle où α ne s'annule pas :

$$\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x) \Leftrightarrow y'(x) + \underbrace{\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}}_{a(x)} y(x) = \underbrace{\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}}_{g(x)} \text{ pour } \alpha(x) \neq 0.$$

Exercice 7

[-M4-] Résoudre : $y' + \frac{1-x}{x}y = e^x$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 8

[-M4-] Résoudre l'équation différentielle : $x^2y' + xy = 1$.

