

Polynômes

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- VI1 Maîtriser le degré d'un polynôme.
- VI2 Maîtriser l'expression des coefficients d'un produit de polynômes.
- VI3 Savoir manipuler la relation de divisibilité et effectuer une division euclidienne quelconque.
- VI4 Savoir faire une décomposition en éléments simples élémentaire.
- VI5 Connaître la notion de racines simples et multiples ainsi que leur lien avec la factorisation du polynôme.
- VI6 Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- VI7 Savoir manipuler les relations coefficients/racines.

Dans tout le cours, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Plan

1 Généralités

- Définition et opérations
- Degré d'un polynôme
- Polynômes et fonctions polynômiales
- Polynôme dérivé
- Les exercices du jour

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

3 Racines d'un polynôme

4 Factorisation de polynômes

⇒ Définition :

Définition 1:

- ① On appelle polynôme à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute expression P de la forme :

$$P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k; \quad \text{où}$$

- X est un symbole formel appelé indéterminée ;
 - $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ appelés coefficients du polynôme P ;
- ② On dit que deux polynômes sont égaux lorsque leurs coefficients sont égaux.

Notation : On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

REMARQUES :

- ① Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé polynôme nul et est noté 0 ;
- ② Si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, on écrit aussi $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k$ avec $a_k = 0$ pour $k > n$.

⇒ Opérations usuelles :

 somme : Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$, on appelle somme de P et Q , et on note $P + Q$ le polynôme :

$$P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k.$$

 multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$:

Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note λP le polynôme :

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k) X^k.$$

 produit :

$$PQ = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k, \quad \text{avec } c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} = \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j.$$

 puissance :

On note $P^0 = 1$, $P^1 = P$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $P^{n+1} = P^n P$.

 composition :

Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$, on note $P \circ Q$ ou $P(Q)$ le polynôme :

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k Q^k.$$

REMARQUE : Les propriétés des opérations précédentes sont les mêmes que pour les fonctions.

Définition 2:

- ❶ Soit P un polynôme non nul. Si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on appelle degré de P , et on note $\deg(P)$, le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$;
- ❷ Par convention on pose : $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$.
- ❸ Si $\deg(P) \geq 0$ alors $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k$ et le coefficient dominant de P est le coefficient $a_{\deg P}$.
- ❹ Si ce dernier est égal à 1 alors on dit que le polynôme est unitaire.
- ❺ On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes P tels que : $\deg(P) \leq n$.

Proposition 1

Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{K}[X]$, Q un polynôme non nul. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- $\deg(\lambda P) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda = 0 \\ \deg(P) & \text{sinon} \end{cases}$;
(car le polynôme nul est de degré égal à $-\infty$ par convention) ;
- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$. Si de plus $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$;
- Si $\deg(Q) \geq 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$. Si $\deg(Q) = 0$ alors Q est constant et $P(Q)$ également.

REMARQUE : La formule $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ est valable même si l'un des polynôme est nul en adoptant la convention : $-\infty = -\infty - \infty$ ou $-\infty = a - \infty$ avec $a \in \mathbb{N}$.

Définition 3:

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on note $\tilde{P} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ la fonction telle que :

$\forall x \in \mathbb{K}, \tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. On dit que l'on substitue le nombre x à l'indéterminée X et

on appelle $\tilde{P}$ la fonction polynômiale associée au polynôme P .

Rigoureusement, on différencie donc l'expression formelle : $P = X^2 + 1$ de la fonction $\tilde{P}(x) = x^2 + 1$. Nous n'avons donc pas le droit d'écrire $P(1)$ mais en revanche $\tilde{P}(1)$ a un sens.

REMARQUE : On peut substituer d'autres objets qu'un scalaire. Par exemple, on peut substituer des matrices carrées :

$$P(A) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k, \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exemple : pour $P = X^2 - 3X + 2$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$$P(M) = M^2 - 3M + 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = O_2.$$

Définition 4:

- ❶ Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . On appelle polynôme dérivé de P , et on note P' , le polynôme défini par :

$$P' = \begin{cases} \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ❷ On définit la suite des polynômes dérivés $P^{(n)}$, en posant : $P^{(0)} = P$, et pour $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$

Proposition 2(formule de Taylor)

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k.$$

Exercice 1

[M1] Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P^2 = \frac{1}{2}X^3P'$. On note $p = \deg(P)$.

- ① Exprimer $\deg(P^2)$ et $\deg\left(\frac{1}{2}X^3P'\right)$ en fonction de p .
- ② En déduire les valeurs possibles de p puis la forme de P .
- ③ Étudier la réciproque.

Exercice 2

[M2] On pose : $P = (X + 1)^n$.

- ① Montrer que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec a_k à expliciter.
- ② En utilisant la formule du produit de polynômes expliciter la valeur du coefficient de degré k de P^2 .
- ③ En remarquant que $P^2 = (X + 1)^{2n}$, en déduire la formule :
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Plan

1 Généralités

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

- Diviseurs et multiples
- Division euclidienne
- Décomposition en éléments simples
- Les exercices du jour

3 Racines d'un polynôme

4 Factorisation de polynômes

Définition 5:

- ❶ Soient $(A; B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On dit que A divise B , et on note $A|B$, lorsqu'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $B = AC$;
- ❷ Pour $A \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble des diviseurs de A est l'ensemble des polynômes B tels que $B|A$;
- ❸ Pour $A \in \mathbb{K}[X]$, l'ensemble des multiples de A est l'ensemble des polynômes B tels que $A|B$;

Proposition 3

- ❶ Soit $P \neq 0 \in \mathbb{K}[X]$ et Q un diviseur de P . Alors $\deg(Q) \leq \deg(P)$.
- ❷ Si P divise Q et Q divise R alors P divise R
- ❸ Si P divise Q et R alors P divise $AQ + BR$ avec $(A; B) \in \mathbb{K}[X]^2$.

Théorème 1

(Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$) Soient A et B deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$A = QB + R \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(B).$$

- Q est appelé le quotient de la division euclidienne de A par B ;
- R est appelé le reste de la division euclidienne de A par B .

Proposition 4

Le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est $P(\alpha)$.

Proposition 5

Soient $a_1, \dots, a_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe : $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $P_1 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tels que :

$$\frac{P}{\prod_{k=1}^n (X - a_k)} = P_1 + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X - a_k}.$$

De plus P_1 est le quotient de la division euclidienne de P par $\prod_{k=1}^n (X - a_k)$.

Exercice 3

[M4] Décomposer en éléments simples les expressions R suivantes puis calculer l'intégrale proposée :

$$(a) R = \frac{1}{(X-1)(X-2)(X-3)}, I = \int_{-1}^0 R(t) dt;$$

$$(b) R = \frac{X^2 + X + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}, I = \int_{-1}^0 R(t) dt;$$

$$(c) R = \frac{X^4 - 11}{X^2 + 4}, I = \int_0^2 R(t) dt;$$

$$(d) R = \frac{X^2 + 2X + 1}{X^3 - 1}, I = \int_{-1}^0 R(t) dt.$$

Plan

- 1 Généralités
- 2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$
- 3 Racines d'un polynôme
 - Racines d'un polynôme
 - Racines multiples
 - Les exercices du jour
- 4 Factorisation de polynômes

Définition 6:

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P si $\tilde{P}(\alpha) = 0$ avec $\tilde{P}$ la fonction polynômiale associée.

Proposition 6

Caractérisation des racines par la divisibilité. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

- ❶ α est racine de P dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$ est nul, ce qui est équivalent à $X - \alpha$ divise P .
- ❷ Plus généralement si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont r éléments de $\mathbb{K}$ **distincts**, alors :

$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des racines de P si et seulement si :
$$\prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)$$
 divise P .

Théorème 2 **Fondamental de l'algèbre par d'Alembert Gauss**

| Tout polynôme non constant dans $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.



conséquences :

le nombre de racines de $P \neq 0$ est toujours plus petit que le degré du polynôme. En particulier, le nombre de racines d'un polynôme non nul est fini.

De la même façon : Si P a une infinité de racines alors P est le polynôme nul.

Définition 7:

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P . L'ordre de la multiplicité de α est l'entier k tel que $(X - \alpha)^k$ divise P et $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P . Autrement dit :

- $(X - \alpha)^k | P$;
- $P = (X - \alpha)^k Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

Si la multiplicité est égale à 1 alors on dit que la racine est simple, si elle est égale à 2 alors on dit qu'elle est double...

Proposition 7

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$.

- ❶ Si α est racine de P d'ordre k , alors $1 \leq k \leq n$;
- ❷ Si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des racines distinctes de P d'ordres respectifs $k_1, \dots, k_r$, alors $\prod_{j=1}^r (X - \alpha_j)^{k_j} \mid P$.

Théorème 3(caractérisation pratique)

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est racine de P

d'ordre k si et seulement si $\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) = 0 \\ \vdots \\ P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0. \end{cases}$

Exercice 4

| [M5] Déterminer les racines complexes de $X^3 + 1$, $X^4 - 1$.

Exercice 5

| [M5] On cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(X+1) = P(X)$.

- 1. Vérifier que si α est racine de P , alors $\alpha + 1$ également puis que P admet une infinité de racines.
- 2. Conclure.

Exercice 6

| [M5] Montrer que 1 est racine de $P = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$ et déterminer sa multiplicité. En déduire la factorisation de P .

Plan

- 1 Généralités
- 2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$
- 3 Racines d'un polynôme
- 4 Factorisation de polynômes
 - Polynômes scindés
 - Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$
 - Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
 - Relations coefficients/racines
 - Les exercices du jour

Définition 8:

Un polynôme est dit scindé s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 dans $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 8

Tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Ainsi, un polynôme de degré $n \geq 1$ admet exactement n racines (comptées avec leur multiplicité).



conséquence :



Un polynôme de degré n qui admet n racines distinctes est donc scindé à racines simples.

Une conséquence très intéressante de ce résultat est qu'il suffit de connaître ses racines ainsi que leurs multiplicités pour factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 9

| Si $P \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\bar{\alpha}$ est également racine de P .



| Ceci est faux pour des polynômes à coefficients complexes non réels : les deux racines de $(X+i)(X+2i) = X^2 + 3iX - 2$ ne sont pas conjuguées.

On en déduit la factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ à partir de leurs factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Théorème 4

Soit P non nul de $\mathbb{R}[X]$. Alors, P s'écrit comme le produit de polynômes de degré 1 et de polynôme de degré 2 de discriminant strictement négatif. Autrement dit : il existe $\lambda, \alpha_1; \dots; \alpha_r \in \mathbb{R}, (\beta_1; \gamma_1); \dots; (\beta_q; \gamma_q) \in \mathbb{R}^2, (k_1; \dots; k_r; l_1; \dots; l_q) \in \mathbb{N}^{r+q}$ avec $(r; q) \in \mathbb{N}^2 - \{(0; 0)\}$ tels que

$$P = \lambda \left(X - \alpha_1 \right)^{k_1} \cdots \left(X - \alpha_r \right)^{k_r} \left(X^2 + \beta_1 X + \gamma_1 \right)^{l_1} \cdots \left(X^2 + \beta_q X + \gamma_q \right)^{l_q}$$

tels que $\forall k \in \{1; \dots; q\}, \beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$.



conséquence :

⌘ Tout polynôme P tel que $\deg(P) > 2$ peut se factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 10(relations coefficients/racines)

Soient $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ ($a_n \neq 0$) et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les n racines de P (non nécessairement distinctes). Alors :

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n};$$

$$\textcircled{2} \quad \prod_{k=1}^n \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$



conséquence :

On retrouve le fait que la somme des racines nèmes de l'unité fait 0. En effet les racines nèmes ($n \geq 2$) de l'unité sont les racines du polynôme : $X^n - 1$. Le coefficient de degré $n - 1$ est donc nul ce qui assure que la somme des racines est égal à : $\frac{-a_{n-1}}{a_n} = 0$.

Exercice 7

[M6] Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants : $X^2 + X + 1$; $X^6 - 1$; $X^4 + X^2 + 1$.

Exercice 8

[M7] Soit $n \geq 2$. Pour $P = X^n - 1$ Donner la somme des racines (n -èmes de l'unité) et le produit des racines de P .