Nombres entiers, rationnels et réels

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

Plan

Définition :

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. Un majorant de A, lorsqu'il existe, est un réel M tel que : $\forall x \in A, x \leq M$;
2. Le maximum de A, lorsqu'il existe, est le réel $a \in A$ tel que $\forall x \in A, x \leq a$. On note $a = \max(A)$;
3. Un minorant de A, lorsqu'il existe, est un réel m tel que : $\forall x \in A, x \geq m$;
4. Le minimum de A, lorsqu'il existe, est le réel $b \in A$ tel que $\forall x \in A, x \geq b$. On note $b = \min(A)$;
5. Si A admet au moins un majorant, on dit que A est majoré. Si A admet au moins un minorant, on dit que A est minoré. Si A est majoré et minoré, on dit que A est borné.

REMARQUE : On dit également ≪ plus grand élément de A ≫au lieu de ≪ maximum de A ≫. De même, on dit plus petit élément eu lieu de minimum.

Définition :

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On appelle borne supérieure de A, et on note $\sup(A)$ lorsqu'elle existe, le plus petit des majorants de A ;
2. On appelle borne inférieure de A, et on note $\inf(A)$ lorsqu'elle existe, le plus grand des minorants de A.

Proposition

1. Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré admet une borne supérieure ;
2. De même tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré admet une borne inférieure.

REMARQUES :

(1) A admet un maximum si et seulement si sa borne supérieure appartient à A ;

(2) De même, A admet un minimum si et seulement si sa borne inférieure appartient à A.

On note $\mathbb{N} = \{0;\ 1;\ 2;\ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels.

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.

1. A admet un plus petit élément.
2. Si A est majorée, alors A admet un plus grand élément.

Principe de la récurrence dite faible

But : On considère $\mathcal{P}(n)$ une assertion qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit n. (Exemple : $\mathcal{P}(n)$:≪ $2^n \geq n$ ≫.)

Proposition

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On suppose :

(i) $\mathcal{P}(0)$ vraie ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

⇨ la récurrence à partir d'un certain rang :

Proposition

Soient $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose :

(i) $\mathcal{P}(n_0)$ vraie ;

(ii) $\forall n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors, quel que soit $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\mathcal{P}(n)$ « $2^n \geq n+2$ »est vraie.

⇨ la récurrence à plusieurs pas :

Proposition

Soient $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose :

(i) $\underbrace{\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(r-1)}_{r \text{ éléments}}$ vraies ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), ..., \mathcal{P}(n+r-1)}_{r \text{ éléments}} \Rightarrow \mathcal{P}(n+r)$.

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice

Soit (U_n) telle que : $U_0 = 1, U_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = n$.

⇨ la récurrence forte :

Proposition

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On suppose :

(i) $\mathcal{P}(0)$ vraie ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice

Soit (u_n) telle que : $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n!$.

Plan

Définition :

- Soient $(a;\ b) \in \mathbb{N}^2$. On dit que a divise b, et on note $a|b$, lorsqu'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $b = ac$.
- Pour $a \in \mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de a est l'ensemble des entiers naturels b tels que $b|a$.
- Pour $a \in \mathbb{N}$, l'ensemble des multiples de a est l'ensemble des entiers naturels b tels que $a|b$.

Proposition (de la relation de divisibilité)

Soient a, b deux entiers.

- **Transitivité**. Pour $c \in \mathbb{N}$, si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$;
- Si $d \in \mathbb{N}$ et $d|a$ et $d|b$, alors $d|(au + bv)$, avec $(u;\ v) \in \mathbb{N}^2$ quelconque ;
- **Antisymétrie** $\left\{ \begin{array}{l} a|b \\ b|a \end{array} \right. \Leftrightarrow a = b$.

Exercice

Soit $n = a_k \cdots a_0 = \sum^{k} a_i 10^i$, $a_i \in \{0; \cdots ; 9\}$, sa décomposition en base 10. Alors

Théorème (division euclidienne) d'après Euclide (-300 avant JC)

Soient $(a;\ b) \in \mathbb{N}^2$ et $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q;\ r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

- Le nombre q s'appelle le quotient de la division euclidienne ;
- Le nombre r s'appelle le reste de la division euclidienne.

Exercice

En cherchant les restes possibles de la division euclidienne de n par 3, montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3.

Définition :

Un nombre p est dit premier si $p \geq 2$ et les seuls diviseurs de p dans $\mathbb{N}^*$ sont 1 et p.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Proposition

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.

Théorème (décomposition en facteurs premiers)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe **un unique entier** r, une **unique** famille de nombres premiers $p_1 < p_2 < ... < p_r$ et une **unique** famille d'entiers naturels non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r} = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}.$$

Exercice

Montrer que 6 divise $n(n+1)(n+2)$.

Proposition

Il existe une infinité de nombres premiers.

Définition :

Considérons deux entiers a, b non nuls.

- Le plus grand diviseur commun de a et b existe et est noté $\mathrm{pgcd(a;b)}$.

$$1 \leq \mathrm{pgcd(a;b)} \leq \mathrm{min(a;b)};$$

- Le plus petit multiple commun de a et b existe et est noté $\mathrm{ppcm(a,b)}$.

$$\max(a;b) \leq \mathrm{ppcm(a;b)} \leq \mathrm{ab}.$$

Théorème

Soient $a = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\beta_i}$ avec $N \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1;\ N]\!], \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}, p_i \in \mathcal{P}$.

- $\mathrm{pgcd(a;b)} = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{p_i}^{\min(\alpha_\mathrm{i};\beta_\mathrm{i})}$;
- $\mathrm{ppcm(a;b)} = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{p_i}^{\max(\alpha_\mathrm{i};\beta_\mathrm{i})}$.

De plus : $\boxed{ab = \mathrm{pgcd(a;b)ppcm(a;b)}.}$

Proposition

Soient $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors $\mathrm{pgcd(a, b) = pgcd(b, r)}$.

conséquence :

On en déduit l'Algorithme d'Euclide : On suppose que $a \geq b$. Alors on effectue la division euclidienne de a par b. Tant que le reste n'est pas nul, on remplace a par b et b par le précédent reste. Lorsque le reste devient nul, le pgcd est égal à la valeur du reste obtenu à l'issue de la division euclidienne précédente.

Plan

⇨ nombres entiers relatifs :

On note $\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ldots\}$ l'ensemble des entiers relatifs. Nous constatons immédiatement les deux choses suivantes :

1. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $-x \in \mathbb{Z}$ (l'opposé d'un entier relatif est un entier relatif).
2. Si $x \in \mathbb{Z}^*$, $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm 1$.

⇨ nombres rationnels :

Définition :

1. On appelle nombre rationnel tout nombre r tel que : $r = \frac{p}{q}$, avec $(p;\ q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels ;
2. Un nombre qui n'est pas rationnel est dit irrationnel. On note $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels.

REMARQUES :

(1) L'écriture $r = \frac{p}{q}$, avec $(p;\ q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ n'est pas unique : $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. On obtient en revanche l'unicité en imposant p et q premiers entre eux.

(2) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. En effet, si $x \in \mathbb{Z}$, alors : $x = \dfrac{x}{1}$, avec $x \in \mathbb{Z}$ et $1 \in \mathbb{N}^*$.

Proposition

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Proposition

1. $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe, c'est à dire :
   (a) La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel ;
   (b) L'opposé d'un nombre rationnel est rationnel.
2. $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe, c'est à dire :
   (a) Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel ;
   (b) Si $x \in \mathbb{Q}^*$, alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}^*$.

La somme de deux nombres irrationnels n'est pas forcément un nombre irrationnel (exemple : $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$). De même, le produit de deux nombres irrationnels n'est pas forcément un nombre irrationnel (exemple : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$).

Exercice

On considère $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Définition :

Un nombre x est un nombre **décimal** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $10^n x \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Proposition

1. La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
2. Le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

⇨ partie entière d'un nombre réel :

Définition :

Soit x un nombre réel. On appelle partie entière de x, et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x : $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z}/n \leq x\}$.

REMARQUE : Si $k \in \mathbb{Z}$, $\lfloor k \rfloor = k$.

➩ partie entière d'un nombre réel :

Proposition (propriétés de la partie entière)

Soient x, y deux nombres réels. Alors :

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$;
2. $x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$;
3. $\forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

REMARQUE : Le 2 de la proposition précédente traduit le fait que la fonction partie entière est croissante.

- $\lfloor x + y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ en toute généralité. (pour $x = y = \frac{1}{2}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = 0$ et $\lfloor x + y \rfloor = 1$.)
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor nx \rfloor \neq n\lfloor x \rfloor$ en toute généralité. (pour $n \geq 2$ et $x = \frac{1}{n}$, $n\lfloor x \rfloor = 0$ et $\lfloor nx \rfloor = 1$.)

⇨ valeurs approchées d'un nombre réel :

Définition :

Soient x un réel, n un entier naturel et $a \in \mathbb{D}$.

- On dit que a est une valeur approchée de x à la précision 10^{-n} lorsque $|x-a| \leq 10^{-n}$.
- Si de plus $a \leq x$, on dit que a est une valeur approchée par défaut. Dans le cas contraire, on dit que a est une valeur approchée par excès.

Proposition

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, on note :

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad a'_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Alors a_n (respectivement, a'_n) est une valeur approchée de x par défaut (respectivement, par excès) à la précision 10^{-n}.