# Nombres entiers, rationnels et réels

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Maîtriser la notion de borne supérieure ;
- M2 Réaliser un raisonnement par récurrence ;
- M3 Maîtriser la relation de divisibilité ainsi que la notion de nombres premiers ;
- M4 Maîtriser l'algorithme du calcul du pgcd de deux entiers ;
- M5 Maîtriser les différences entre entiers, rationnels, décimaux et réels ;
- M6 Manipuler la partie entière d'un nombre réel.

# Plan


1. Généralités
   - Ensembles majorés, minorés maximum et mininum
   - bornes supérieures et inférieures d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$
   - Une propriété des entiers naturels
   - Principes de récurrence
   - Les exercices du jour
2. Nombres entiers et arithmétique
3. Nombres décimaux, rationnels et réels

## Définition 1:

Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. Un majorant de $A$, lorsqu'il existe, est un réel $M$ tel que : $\forall x \in A, x \leq M$ ;
2. Le maximum de $A$, lorsqu'il existe, est le réel $a \in A$ tel que $\forall x \in A, x \leq a$. On note $a = \max(A)$ ;
3. Un minorant de $A$, lorsqu'il existe, est un réel $m$ tel que : $\forall x \in A, x \geq m$ ;
4. Le minimum de $A$, lorsqu'il existe, est le réel $b \in A$ tel que $\forall x \in A, x \geq b$. On note $b = \min(A)$ ;
5. Si $A$ admet au moins un majorant, on dit que $A$ est majoré. Si $A$ admet au moins un minorant, on dit que $A$ est minoré. Si $A$ est majoré et minoré, on dit que $A$ est borné.

REMARQUE : On dit également « plus grand élément de $A$ »au lieu de « maximum de $A$ ». De même, on dit plus petit élément au lieu de minimum.

## Définition 2:

Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On appelle borne supérieure de $A$, et on note $\sup(A)$ lorsqu'elle existe, le plus petit des majorants de $A$ ;
2. On appelle borne inférieure de $A$, et on note $\inf(A)$ lorsqu'elle existe, le plus grand des minorants de $A$.

## Théorème 1Admis

1. Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et majoré admet une borne supérieure ;
2. De même tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré admet une borne inférieure.

## Proposition 1

Soit $A \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.

1. $A$ admet un plus petit élément.
2. Si $A$ est majorée, alors $A$ admet un plus grand élément.

➪ Récurrence faible :

**But :** On considère $\mathcal{P}(n)$ une assertion qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On souhaite montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n$. (Exemple : $\mathcal{P}(n)$ : « $2^n \geq n$ ».)

## Proposition 2

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On suppose :

(i) $\mathcal{P}(0)$ vraie ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

REMARQUEs :

1. (i) s'appelle l'initialisation de la récurrence ;
2. (ii) s'appelle l'hérédité de la récurrence.

➪ La récurrence à partir d'un certain rang :

## Proposition 3

Soient $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose :

(i) $\mathcal{P}(n_0)$ vraie ;

(ii) $\forall n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors, quel que soit $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

➪ La récurrence à plusieurs pas :

## Proposition 4

Soient $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose :

(i) $\underbrace{\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(r-1)}_{r \text{ éléments}}$ vraies ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), ..., , \mathcal{P}(n+r-1)}_{r \text{ éléments}} \Rightarrow \mathcal{P}(n+r)$.

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

➪ La récurrence forte :

**Proposition 5**

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant de $n \in \mathbb{N}$. On suppose :

(i) $\mathcal{P}(0)$ vraie ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), ..., \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

## Exercice 1

[-M1-] Pour les ensembles $A$ et fonctions $f$ ci-dessous, déterminer : $\sup_{x\in A}\{f(x)\}$ puis préciser la valeur du maximum lorsqu'il existe :

1. $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0;\ 1[ \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$ et $A = [0;\ 1]$.
2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ et $A = \mathbb{R}$.

## Exercice 2

[-M2-] Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

## Exercice 3

[-M2-] Montrer que pour tout entier naturel $n \geq \ldots\ldots$, $\mathcal{P}(n)$ « $2^n \geq n+2$ »est vraie.

## Exercice 4

[-M2-] Soit $(U_n)$ telle que : $U_0 = 0, U_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$. Conjecturer une expression simple de $U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis montrez par récurrence votre conjecture.

## Exercice 5

[-M2-] Soit $(U_n)$ telle que : $U_0 = 1, U_1 = -3$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+2} + 2U_{n+1} + U_n = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = (-1)^n(2n+1)$.

## Exercice 6

[-M2-] On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ $a_n = n!$.

# Plan


1. Généralités
2. Nombres entiers et arithmétique
   - La relation de divisibilité
   - Division euclidienne dans $\mathbb{N}$
   - Les nombres premiers
   - PGCD et PPCM de deux nombres entiers
   - Algorithme d'Euclide et calcul du $\mathrm{pgcd}$ de deux entiers naturels
   - Les exercices du jour
3. Nombres décimaux, rationnels et réels

## Définition 3:

- Soient $(a;\ b) \in \mathbb{N}^2$. On dit que $a$ divise $b$, et on note $a|b$, lorsqu'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $b = ac$.
- Pour $a \in \mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de $a$ est l'ensemble des entiers naturels $b$ tels que $b|a$
- Pour $a \in \mathbb{N}$, l'ensemble des multiples de $a$ est l'ensemble des entiers naturels $b$ tels que $a|b$.

## Proposition 6(de la relation de divisibilité)

Soient $a, b$ deux entiers.

- **Transitivité**. Pour $c \in \mathbb{N}$, si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$ ;
- Si $d \in \mathbb{N}$ et $d|a$ et $d|b$, alors $d|(au + bv)$, avec $(u;\ v) \in \mathbb{N}^2$ quelconque ;
- **Antisymétrie** $\left\{ \begin{array}{l} a|b \\ b|a \end{array} \right. \Leftrightarrow a = b.$

## Théorème 2(division euclidienne) d'après Euclide (-300 avant JC)

Soient $(a;\ b) \in \mathbb{N}^2$ et $b \neq 0$. Il existe un unique couple $(q;\ r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

- Le nombre $q$ s'appelle le <u>quotient</u> de la division euclidienne ;
- Le nombre $r$ s'appelle le <u>reste</u> de la division euclidienne.

### Définition 4:

Un nombre $p$ est dit premier si $p \geq 2$ et les seuls diviseurs de $p$ dans $\mathbb{N}^*$ sont $1$ et $p$.

### Proposition 7

Tout nombre entier supérieur ou égal à $2$ admet au moins un diviseur premier.

### Proposition 8

Il existe une infinité de nombres premiers.

## Théorème 3(décomposition en facteurs premiers)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe **un unique entier** $r$, une **unique** famille de nombres premiers $p_1 < p_2 < ... < p_r$ et une **unique** famille d'entiers naturels non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} ... p_r^{\alpha_r} = \prod_{k=1}^{r} p_k^{\alpha_k}$$

.

**conséquence :**

1. Si un nombre premier $p$ divise un produit $ab$ alors $p$ divise $a$ ou $b$ ;
2. Si deux nombres premiers distincts $p_1$ et $p_2$ divisent un nombre $a$, alors $p_1 p_2$ divise $a$.

Ceci est faux si les nombres ne sont pas premiers. Par exemples :

1. $6$ divise $4 \times 9$ mais $6$ ne divise ni $4$ ni $9$.
2. $6$ et $4$ divisent $4 \times 9$ mais $6 \times 4$ ne divise pas $4 \times 9$.

## Définition 5:

Considérons deux entiers $a, b$ non nuls.

- Le plus grand diviseur commun de $a$ et $b$ existe et est noté $\mathrm{pgcd(a;b)}$.

$$1 \leq \mathrm{pgcd(a;b)} \leq \mathrm{min(a;b)}$$

- Le plus petit multiple commun de $a$ et $b$ existe et est noté $\mathrm{ppcm(a,b)}$.

$$max(a;b) \leq \mathrm{ppcm(a;b)} \leq \mathrm{ab}$$

## Théorème 4

Soient $a = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\beta_i}$ avec $N \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1; \cdots; N\}, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}, p_i \in \mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

- $\mathrm{pgcd(a;b)} = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{p_i^{min(\alpha_i;\beta_i)}}$
- $\mathrm{ppcm(a;b)} = \prod_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{p_i^{max(\alpha_i;\beta_i)}}$

De plus : $\boxed{ab = \mathrm{pgcd(a;b)ppcm(a;b)}}$

## Proposition 9

Soient $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $r$ le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$. Alors $\mathrm{pgcd(a, b) = pgcd(b, r)}$.

**conséquence :**

On en déduit l'Algorithme d'Euclide : On suppose que $a \geq b$. Alors on effectue la division euclidienne de $a$ par $b$. Tant que le reste n'est pas nul, on remplace $a$ par $b$ et $b$ par le précédent reste. Lorsque le reste devient nul, le pgcd est égal à la valeur du reste obtenu à l'issue de la division euclidienne précédente.

*Exemple :Calcul de* $\mathrm{pgcd}(798;\ 245)$ *:*

$$\begin{array}{rcl} 798 & = & \underline{245} \times 3 + \underline{63} \ . \\ 245 & = & \underline{63} \times 3 + \underline{56} \\ 63 & = & \underline{56} \times 1 + \underline{7} \\ 56 & = & \underline{7} \times 8 + \underline{0} \end{array}$$

Donc, en appliquant la proposition précédente :

$$\begin{aligned} \mathrm{pgcd}(798, 245) &= \mathrm{pgcd}(245, 63) \\ &= \mathrm{pgcd}(63, 56) \\ &= \mathrm{pgcd}(56, 7) \end{aligned}$$

De plus $7|56$ donc $\mathrm{pgcd}(56, 7) = 7$.

## Exercice 7

[-M3-] Soit $n = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i$ , $a_i \in \{0; \cdots ; 9\}$, sa décomposition en base $10$.

Alors montrer que $n$ est divisible par $4$ si et seulement si $4$ divise $10a_1 + a_0$.

## Exercice 8

[-M3-] Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à $5$.

1. En cherchant les restes possibles de la division euclidienne de $n$ par $3$, montrer que $n(n-5)(n+5)$ est un multiple de $3$.
2. En déduire que $6|n(n-5)(n+5)$.

## Exercice 9

[-M3-] Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants : $375; 777\ 000$.

## Exercice 10

[-M4-] Calculer de deux façons différentes le pgcd de $(420, 198)$.

# Plan


1. Généralités
2. Nombres entiers et arithmétique
3. Nombres décimaux, rationnels et réels
   - Entiers relatifs et nombres rationnels
   - Nombres décimaux
   - Partie entière et valeurs approchées décimales de nombres réels
   - Les exercices du jour

➪ **Nombres entiers relatifs** :

On note $\mathbb{Z} = \{\ldots;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ldots\}$ l'ensemble des entiers relatifs. Nous constatons immédiatement les deux choses suivantes :

1. Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $-x \in \mathbb{Z}$. (l'opposé d'un entier relatif est un entier relatif) ;
2. Si $x \in \mathbb{Z}^*$, $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm 1$ ;
3. La somme, la différence et le produit de deux nombres entiers relatifs est encore un nombre entier relatif.

## ⇨ Nombres rationnels :

### Définition 6:

1. On appelle nombre rationnel tout nombre $r$ tel que : $r = \frac{p}{q}$, avec $(p;\ q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels ;
2. Un nombre qui n'est pas rationnel est dit irrationnel. On note $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels.

REMARQUEs :

1. L'écriture $r = \frac{p}{q}$, avec $(p;\ q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ n'est pas unique : $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. On obtient en revanche l'unicité en imposant $p$ et $q$ **premiers entre eux.**
2. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. En effet, si $x \in \mathbb{Z}$, alors : $x = \dfrac{x}{1}$, avec $x \in \mathbb{Z}$ et $1 \in \mathbb{N}^*$.
3. Il existe des nombres irrationnels. En effet :

### Proposition 10

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationel.

## Proposition 11

1. $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe, c'est à dire :
   1. La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel ;
   2. L'opposé d'un nombre rationnel est rationnel.
2. $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe, c'est à dire :
   1. Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel ;
   2. Si $x \in \mathbb{Q}^*$, alors $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}^*$.

La somme de deux nombres irrationnels n'est pas forcément un nombre irrationnel (exemple : $\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$). De même, le produit de deux nombres irrationnels n'est pas forcément un nombre irrationnel (exemple : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$)

## Définition 7:

Un nombre $x$ est un nombre **décimal** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

REMARQUE : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

## Proposition 12

1. La somme et le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
2. Le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal.

## ➪ Partie entière d'un nombre réel :

### Définition 8:

Soit $x$ un nombre réel. On appelle partie entière de $x$, et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$ : $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} / n \leq x\}$.

REMARQUE : Si $k \in \mathbb{Z}$, $\lfloor k \rfloor = k$.

### Proposition 13(propriétés de la partie entière)

Soient $x, y$ deux nombres réels. Alors :

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ ;
2. $x \leq y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ ;
3. $\forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

REMARQUE : Le 2 de la proposition précédente traduit le fait que la fonction partie entière est croissante.

## ➪ Valeurs approchées d'un nombre réel :

### Définition 9:

Soit $x$ un réel, $n$ un entier naturel et $a \in \mathbb{D}$.

- On dit que $a$ est une valeur décimale approchée de $x$ à la précision $10^{-n}$ lorsque $|x - a| \leq 10^{-n}$.
- Si de plus $a \leq x$, on dit que $a$ est une valeur approchée par défaut. Dans le cas contraire, on dit que $a$ est une valeur approchée par excès.

*Exemple :* Pour $x = 0.1053$ :

- $a = 0.105$ est une valeur approchée par défaut car : $a \leq x$ et $|x - a| = 0,0003 \leq 10^{-3}$.
- $a' = 0.106$ est une valeur approchée par excès car : $a > x$ et $|x - a| = 0,0007 \leq 10^{-3}$.

## Proposition 14

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel $n$, on note :

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{et} \quad a'_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Alors $a_n$ (respectivement, $a'_n$) est une valeur approchée de $x$ par défaut (respectivement, par excès) à la précision $10^{-n}$.

REMARQUE : $a_n \in \mathbb{D}$ et $a'_n \in \mathbb{D}$.

*Exemple :*
Pour $x = 0,1053$, $10^3 x = 105,3$ donc :

- $a_3 = \dfrac{\lfloor 10^3 x \rfloor}{10^3} = \dfrac{\lfloor 105,3 \rfloor}{10^3} = \dfrac{105}{10^3} = 0.105.$
- $a'_3 = \dfrac{\lfloor 10^3 x \rfloor + 1}{10^3} = \dfrac{\lfloor 105,3 \rfloor + 1}{10^3} = \dfrac{106}{10^3} = 0.106.$

## Exercice 11

[-M5-] On considère $x \in \mathbb{Q}$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $x + \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

## Exercice 12

[-M6-] Résoudre l'équation $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$