Nombres complexes

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

Plan

⇨ définitions :

Définition :

1. On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et i tel que $i^2 = -1$ (c'est à dire i solution de l'équation $x^2 = -1$). On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes ;
2. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on appelle :
   a la partie réelle de z, notée $\mathcal{R}e(z)$
   b la partie imaginaire de z, notée $\mathcal{I}m(z)$;
3. L'écriture $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de z ;
4. Deux nombres complexes sont égaux si leurs parties réelles ET imaginaires sont égales.

⇨ opérations algébriques :

On étend naturellement (associativité, distributivité) les opérations algébriques réelles. Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes, on définit :

(a) la somme $z + z' = (a + a') + i(b + b')$;

(b) le produit
$$\begin{aligned} zz' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + aib' + iba' + (ib) \times (ib') \\ &= aa' + i(ab' + a'b) - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b); \end{aligned}$$

(c) l'inverse (pour $z \neq 0$)
$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a + ib} \\ &= \frac{1 \times (a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} \\ &= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned} .$$

On vérifie par ailleurs que la somme et le produit sont encore commutatifs : $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$.

Définition :

Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on appelle conjugué de z, et on note $\overline{z}$, le nombre complexe : $\overline{z} = a - ib$.

Proposition (propriétés de la conjugaison)

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $$z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z)$$ $$z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$$
- $$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$ $$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$$ $$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$$ $$\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$
- $$\overline{\overline{z}} = z$$

⇨ définition et premières propriétés :

Définition :

Pour $z = a + ib$, on appelle module de z le nombre réel positif : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition (propriétés du module)

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
  $|\overline{z}| = |z|$
  $z\overline{z} = |z|^2$
- $$|zz'| = |z||z'|$$
  $$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$
  $$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$
- $$|\mathcal{R}e(z)| \leq |z|$$
  $$|\mathcal{I}m(z)| \leq |z|$$

Exercice

Calculer le module de $(1+2i)^6$.

⇨ inégalité triangulaire :

Proposition

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;
2. $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.

Définition :

- À tout nombre complexe : $z = a + ib$, on associe le point du plan M de coordonnées $(a;\ b)$ dans le repère usuel. On dit que M est l'image de z et on note ce point $M(z)$.
- A tout point du plan M de coordonnées $(a;\ b)$ on associe le nombre complexe $z = a + ib$. On dit que z est l'affixe du point M.
- A tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan de coordonnées $(a;\ b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$. On dit que z est l'affixe de $\overrightarrow{u}$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ s'identifie alors au plan muni du repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, appelé alors *plan complexe*.

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives u, v. Pour tous réels $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ le vecteur $\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.

Exercice

Résoudre géométriquement l'équation $|z-1| = |z+i|$.

Proposition

- Le cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon $r > 0$ est :

$$\{M(z) \in \mathbb{C} / |z - z_A| = r\}.$$

- Le disque ouvert de centre $A(z_A)$ et de rayon $r > 0$ est :

$$\{M(z) \in \mathbb{C} / |z - z_A| < r\};$$

- Le disque fermé de centre $A(z_A)$ et de rayon $r > 0$ est :

$$\{M(z) \in \mathbb{C} / |z - z_A| \leq r\}.$$

Exercice

Résoudre géométriquement $\begin{cases} |z+1| \leq 1 \\ |z-1| \leq 1 \end{cases}$.

Plan

➯ définitions et premières propriétés :

Définition :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Proposition

Pour θ et θ' deux nombres réels, nous avons : $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

conséquences :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$,

- $\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{-i\theta}$;
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \left(e^{i\theta}\right)^{n} = e^{in\theta}$.

Proposition

1. Tout nombre complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$;
2. De plus, une telle écriture est unique à 2π près, c'est à dire, pour $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, θ_1 et θ_2 deux réels, nous avons :

$$z = r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 \ [2\pi] \end{cases} .$$

Définition :

1. Pour $z \neq 0$, l'écriture $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z ;
2. Le réel θ de l'écriture ci-dessus est appelé argument de z.

On dit **UN** argument, et non pas **L'** argument.

Proposition (propriétés de l'argument)

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors :

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;
2. $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)\ [2\pi]$;
3. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$;
4. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

⇨ les formules d'Euler :

Proposition

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, nous avons : $\boxed{\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}}$

⇨ la formule de De Moivre :

Proposition

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, nous avons : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, ce qui s'écrit encore :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Définition :

Si $z = a + ib$ est la forme algébrique de z, on note $e^z = e^a \times e^{ib}$, où e^a représente l'exponentielle réelle.

Proposition (propriétés algébriques)

Pour z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;
2. $(e^z)^{-1} = e^{-z}$;
3. $e^{z-z'} = \dfrac{e^z}{e^{z'}}$;
4. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Proposition

Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

$$\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z' = z + 2\pi k i$$

Exercice

Résoudre l'équation $e^z = 2i$, puis $e^{2z} = 1 + i\sqrt{3}$.

➩ Caractérisations de l'alignement et de l'orthogonalité :

Proposition

Soient $A(z_A); B(z_B); C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points tels que $z_B \neq z_A$ et $z_C \neq z_D$. Alors, un argument du nombre complexe $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD})$.

conséquences :

(1) Trois points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si $\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} = 0[\pi] \Leftrightarrow \arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

(2) Prenons A, B, C, D distincts. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

Exercice

À quelle condition sur $z \in \mathbb{C}$ les points $A(1)$, $M(z)$ et $N(z^2)$ forment-ils un triangle rectangle en A ?

⇨ Expressions complexes de transformations planes usuelles :

Définition :

Si O est l'origine du repère, on appelle :

1. translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, et on note t, l'application qui à tout point M du plan associe le point : $t(M) = M + \overrightarrow{u}$;
2. rotation de centre O et d'angle θ, et on note r, l'application qui à tout point M associe le point $r(M)$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} ||\overrightarrow{Or(M)}|| = ||\overrightarrow{OM}|| \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Or(M)}}) = \theta \ [2\pi] \end{array} \right.$;
3. homothétie de centre O et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et on note h, l'application qui à tout point M du plan associe le point $h(M)$ tel que $\overrightarrow{Oh(M)} = \lambda \overrightarrow{OM}$.

⇨ Expressions complexes de transformations planes usuelles :

Proposition (expression en affixes complexes)

1. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Si on note z l'affixe de M et z' l'affixe de $t(M)$, alors : $z' = z + b$ où $b \in \mathbb{C}$ est l'affixe complexe de $\overrightarrow{u}$.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle θ. Si on note z l'affixe de M et z' l'affixe de $r(M)$, alors : $z' = e^{i\theta}z$.
3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et h l'homothétie de centre O et de rapport λ. Si on note z l'affixe de M et z' l'affixe de $h(M)$, alors : $z' = \lambda z$.

Exercice

Identifier les transformations du plan d'écritures complexes suivantes :

$$\text{(a) } f(z) = z + i - 4; \quad \text{(b) } f(z) = -iz; \quad \text{(c) } f(z) = -\frac{1}{2}z;$$
$$\text{(d)} f(z) = -jz, j = e^{2i\pi/3}.$$

Plan

Définition :

On appelle racine carrée du nombre complexe Z tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = Z$.

Il est possible d'expliciter les racines carrées de n'importe quel nombre complexe en procédant de la façon suivante :
Si l'on pose $Z = a + ib$, nous cherchons donc tous les $z = x + iy$ tels que $z^2 = Z$. La résolution se fait alors en trois étapes :

- On identifie les formes algébriques : $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$. Ainsi : $z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$;
- $z^2 = Z \Rightarrow |z^2| = |Z|$, ce qui donne la relation supplémentaire $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- $$\begin{aligned} z^2 = Z & \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z^2| = |Z| \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \\ 2xy = b \end{cases} . \end{aligned}$$

Exercice

Résoudre l'équation $z^2 = 3 - 4i$.

➩ Résolution :

Proposition

On note $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant du trinôme $T = az^2 + bz + c$. Alors

1. Si $\Delta = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$;
2. Si $\Delta \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions distinctes : $z_1 = \dfrac{-b+w}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-w}{2a}$, où w est une racine carrée de Δ.

Exercice

Résoudre les équations suivantes : $z^2 + \sqrt{3}z + i = 0$, $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$.

Lorsque les coefficients du trinôme sont complexes, alors les solutions complexes ne sont pas forcément conjuguées !

⇨ relations entre coefficients et solutions :

Proposition

1. Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation (non necessairement distinctes) $az^2 + bz + c = 0$, alors $\boxed{z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}}$;
2. Réciproquement, si l'on connaît la somme S et le produit P de deux nombres complexes z_1 et z_2, alors z_1 et z_2 sont solutions de l'équation : $\boxed{z^2 - Sz + P = 0.}$

Exercice

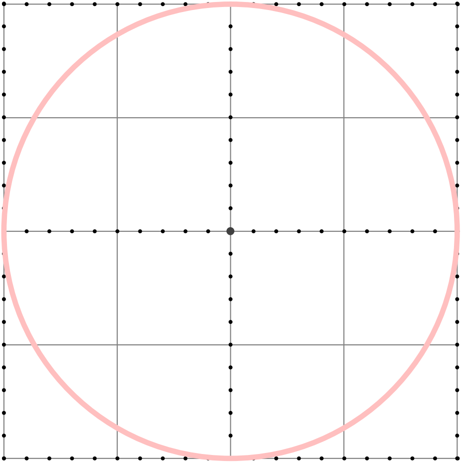
Résoudre le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1 z_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Définition :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-ème de l'unité toute solution de l'équation $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité.

Proposition

si $w = e^{2i\pi/n}$, alors $\mathbb{U}_n = \{1;\ w;\ w^2;\ w^3; \ldots; w^{n-1}\}$.



Proposition (somme des racines n-èmes de l'unité)

Pour $n \geq 2$, la somme des racines n-èmes de l'unité est nulle, c'est à dire :

$$1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} = 0;$$

avec $w = e^{2i\pi/n}$.

Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. On appelle racine n-ième de z tout nombre $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = z$.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout nombre complexe non nul admet n racines n-ièmes distinctes. Plus précidément, si w est tel que $w^n = Z$, avec $Z = re^{i\theta}$ $(Z \neq 0)$, alors :

$$w^n = Z \Leftrightarrow w = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}, \text{ avec } k \in [\![0;\ n-1]\!].$$

Exercice

Résoudre : (a) $z^5 = 8$; (b) $z^3 = 1 + i$.

Plan

Principe : Se débarrasser des facteurs dans une expression trigonométrique. On utilise pour ceci les formules d'Euler.

Exercice

Linéariser $\sin^3(x)$.

Principe : Exprimer $\cos(px)$ et $\sin(px)$ par des puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. On utilise ici la formule de De Moivre.

Exercice

Délinéariser $\cos(3x)$.

On suppose a et b non nuls simultanément.

Proposition

Il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x)+b\sin(x) = r\cos(x-\theta)$.

Exercice

Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = 1$.