

Nombres complexes : compléments

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- MI1 Traduire et résoudre des problèmes de géométrie plane avec des nombres complexes ;
- MI2 Résoudre une équation de degré deux à coefficients complexes ;
- MI3 Connaître les racines nèmes de l'unité et les utiliser pour résoudre des équations complexes.

Plan

1 Nombres complexes et géométrie

- Lien nombres complexes/vecteurs
- Inégalité triangulaire
- Caractérisations de l'alignement et de l'orthogonalité
- Expressions complexes de transformations planes usuelles
- Les exercices du jour

2 Résolution d'équations complexes

Définition 1:

- À tout nombre complexe : $z = a + ib$, on associe le point du plan M de coordonnées $(a; b)$ dans le repère usuel. On dit que M est l'image de z et on note ce point $M(z)$.
- À tout point du plan M de coordonnées (a, b) on associe le nombre complexe $z = a + ib$. On dit que z est l'afixe du point M .
- À tout vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées $(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$. On dit que z est l'afixe de $\vec{u}$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ s'identifie alors au plan muni du repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, appelé alors *plan complexe*.

Proposition 1

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives u, v . Pour tous réels $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ le vecteur $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.



conséquence :

Soit A d'affixe z_A et B d'affixe z_B dans le plan usuel. Alors :

- La somme : $z_A + z_B$ est l'affixe du point M défini par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
- La Différence : $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- Le module : $AB = |z_B - z_A|$.

Proposition 2

- Le cercle de centre $A(z_A)$ et de rayon $r > 0$ est $\{M(z) / |z - z_A| = r\}$.
- Le disque ouvert de centre $A(z_A)$ et de rayon $r > 0$ est $\{M(z) / |z - z_A| < r\}$.
- Le disque fermé de centre $A(z_A)$ et de rayon $r > 0$ est $\{M(z) / |z - z_A| \leq r\}$.

Proposition 3

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

❶ $|z + z'| \leq |z| + |z'|;$

❷ $||z| - |z'||| \leq |z - z'|.$

REMARQUE : Cas d'égalité : $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que : $z' = \lambda z$.

Soit M un point du plan d'affixe z dont une forme trigonométrique est $re^{i\theta}$. On a déjà vu que $OM = |z| = r$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta [2\pi]$. Donc un argument de z est une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Proposition 4

Soient $A(z_A); B(z_B); C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points tels que $z_B \neq z_A$. Alors, un argument du nombre complexe $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.



conséquences :

- ④ Trois points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si :
 $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$
- ② Prenons A, B, C, D distincts. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si :
 $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \text{ est imaginaire pur.}$

REMARQUE : On obtient en fait le même résultat avec trois points distincts (en raisonnant exactement de la même façon) : Les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

Définition 2:

Si O est l'origine du repère, on appelle :

- ❶ translation de vecteur $\vec{u}$, et on note t , l'application qui à tout point M du plan associe le point : $t(M)$ tel que : $\overrightarrow{Mt(M)} = \vec{u}$;
- ❷ rotation de centre O et d'angle θ , et on note r , l'application qui à tout point M associe le point $r(M)$ tel que :
$$\begin{cases} \|\overrightarrow{Or(M)}\| = \|\overrightarrow{OM}\| \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{Or(M)}) = \theta [2\pi] \end{cases} ;$$
- ❸ homothétie de centre O et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et on note h , l'application qui à tout point M du plan associe le point $h(M)$ tel que $\overrightarrow{Oh(M)} = \lambda \overrightarrow{OM}$.

Proposition 5(expression en affixes complexes)

- ❶ Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$. Si on note z l'affixe de M et z' l'affixe de $t(M)$, alors : $z' = z + b$ où $b \in \mathbb{C}$ est l'affixe complexe de $\vec{u}$.
- ❷ Soit r la rotation de centre O et d'angle θ . Si on note z l'affixe de M et z' l'affixe de $r(M)$, alors : $z' = e^{i\theta}z$.
- ❸ Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et h l'homothétie de centre O et de rapport λ . Si on note z l'affixe de M et z' l'affixe de $h(M)$, alors : $z' = \lambda z$.

Exercice 1

[-M1-] Identifier les transformations du plan d'écritures complexes suivantes :

(a) $f(z) = z + i - 4$; (b) $f(z) = -iz$; (c) $f(z) = -\frac{1}{2}z$;
(d) $f(z) = -jz, j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 2

[-M1-] Résoudre géométriquement l'équation $|z - 1| = |z + i|$.

Exercice 3

[-M1-] Soient A et B deux points du plan d'affixe z_A et z_B . Quelle est l'affixe du milieu, noté I , de $[AB]$?

Exercice 4

[-M1-] Résoudre géométriquement $\begin{cases} |z + 1| \leq 1 \\ |z - 1| \leq 1 \end{cases}$

Exercice 5

[-M1-] Soient $A(1 + i)$, $B(3 + 4i)$ et $C(-2 + 3i)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 6

[-M1-] Donner l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. $A(1); M(z); M'(z^2)$ sont alignés.

2. $A(1); M(z); M'(z^2)$ forment un triangle rectangle en A .

Plan

1 Nombres complexes et géométrie

2 Résolution d'équations complexes

- Racine carrée d'un nombre complexe
- Trinôme du second degré à coefficients complexes
- Racines n -èmes de l'unité
- Racines n -ième d'un nombre complexe quelconque
- Les exercices du jour

Définition 3:

| On appelle racine carrée du nombre complexe Z tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = Z$.



| On n'écrit surtout pas $i = \sqrt{-1}$. Le symbole $\sqrt{}$ est exclusivement réservé aux **réels positifs**.

Il est possible d'expliciter les racines carrées de n'importe quel nombre complexe en procédant de la façon suivante :

Si l'on pose $Z = a + ib$, nous cherchons donc tous les $z = x + iy$ tels que $z^2 = Z$.

La résolution se fait alors en trois étapes :

- On identifie les formes algébriques : $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$.

$$\text{Ainsi : } z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} ;$$

- $z^2 = Z \Rightarrow |z^2| = |Z|$, ce qui donne la relation supplémentaire $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$$\bullet \quad z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z^2| = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

REMARQUE : Les deux solutions complexes de l'équation $z^2 = Z$ sont opposées. En effet, si $w^2 = Z$, alors $(-w)^2 = w^2 = Z$.

⇒ Résolution :

Proposition 6

On note $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$ le discriminant du trinôme $T = az^2 + bz + c$ ($a \neq 0$). Alors

1. Si $\Delta = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$;
2. Si $\Delta \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b + w}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - w}{2a}$, où w est une racine carrée de Δ .



Lorsque les coefficients du trinôme sont complexes, alors les solutions complexes ne sont pas forcément conjuguées !

⇒ Relations entre coefficients et solutions :

Proposition 7

- ① Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation (non nécessairement distinctes) $az^2 + bz + c = 0$, alors
$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a} ;$$
- ② Réciproquement, si l'on connaît la somme S et le produit P de deux nombres complexes z_1 et z_2 , alors z_1 et z_2 sont solutions de l'équation :
$$z^2 - Sz + P = 0.$$

Notation : on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est à dire l'ensemble des points du plan situés sur le cercle unité.

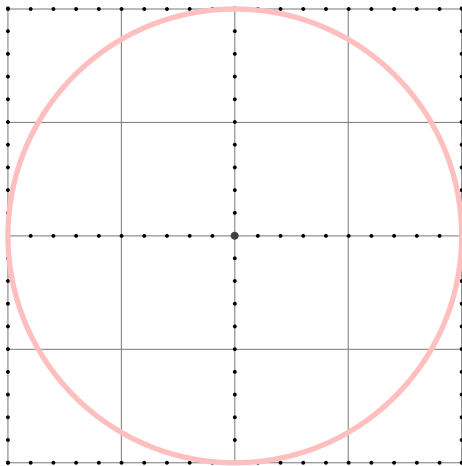
Définition 4:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-èmes de l'unité toute solution de l'équation $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$, l'ensemble des racines n-èmes de l'unité.

REMARQUE : $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$

Proposition 8

si $z_1 = e^{2i\pi/n}$, alors $\mathbb{U}_n = \{z_1; z_1^2; z_1^3; \dots; z_1^{n-1}; \underbrace{1}_{z_1^n}\}$.



REMARQUES :

- ❶ $z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \frac{z_1^n}{z_1} = z_1^{n-1};$
- ❷ De même : $z_1^{-2} = z_1^{n-2};$
- ❸ etc...

Proposition 9(somme des racines n-èmes de l'unité)

Pour $n \geq 2$, la somme des racines n-èmes de l'unité est nulle, c'est à dire :

$$1 + z_1 + z_1^2 + \dots + z_1^{n-1} = 0;$$

avec $z_1 = e^{2i\pi/n}.$

Définition 5:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. On appelle racine n -ième de z tout nombre $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = z$.

Proposition 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout nombre complexe non nul admet n racines n -ièmes distinctes. Plus précisément, si w est tel que $w^n = Z$, avec $Z = re^{i\theta}$ ($Z \neq 0$), alors :

$$w^n = Z \Leftrightarrow w = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \text{ avec } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket.$$

Exercice 7

[-M2-] Trouver les racines carrées de $3 - 4i$. En déduire les racines carrées de $3 + 4i$.

Exercice 8

[-M2-] Résoudre l'équation : $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$.

Exercice 9

[-M2-] En cherchant une racine évidente ($\pm 1, \pm 2, \pm i$), trouver finalement les deux racines de chaque trinôme suivant :

Ⓐ $P_1(z) = z^2 + iz - 1 - i$

Ⓑ $P_2(z) = 2z^2 + 2i(\sqrt{3} - 1)z + 2\sqrt{3}$.

Exercice 10

[-M3-] Déterminer les racines 8-èmes de l'unité, les représenter sur le cercle trigonométrique.

Exercice 11

[-M3-] Résoudre les équations suivantes et donner les formes exponentielles des solutions :

$$(a) z^3 = 1; (b) z^3 = 8 \quad (c) z^3 = 1 + i \quad (d) \left(\frac{z}{z-1} \right)^3 = 1.$$

