

Nombres complexes : la base

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- MI1 Faire du calcul algébrique élémentaire avec les nombres complexes sous forme algébrique ;
- MI2 Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et réciproquement ;
- MI3 Faire du calcul algébrique élémentaire avec les nombres complexes sous forme exponentielle ;
- MI4 Utiliser les nombres complexes pour transformer des expressions trigonométriques.

Plan

- 1 Forme algébrique d'un nombre complexe
 - Définition
 - Opérations algébriques
 - Représentation géométrique d'un nombre complexe
 - Conjugué d'un nombre complexe
 - Les exercices du jour
- 2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe
- 3 Forme exponentielle d'un nombre complexe
- 4 Utilisation des nombres complexes en trigonométrie

Définition 1:

- ① On appelle nombre complexe tout nombre de la forme $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et i tel que $i^2 = -1$ (c'est à dire i solution de l'équation $x^2 = -1$). On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes ;
- ② Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on appelle :
 - a la partie réelle de z , notée $\mathcal{Re}(z)$
 - b la partie imaginaire de z , notée $\mathcal{Im}(z)$;
- ③ L'écriture $z = a + ib$ est appelée forme algébrique de z ;
- ④ Deux nombres complexes sont égaux si leurs parties réelles ET imaginaires sont égales.

REMARQUES :

- ① $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} : z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{Im}(z) = 0$;
- ② Les nombres complexes tels que $\mathcal{Re}(z) = 0$ sont appelés nombres imaginaires purs.

On étend naturellement (associativité, distributivité) les opérations algébriques réelles. Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes, on définit :

- a) la somme $z + z' = a + a' + i(b + b')$
- b) produit $zz' = (a + ib)(a' + ib')$;

$$= aa' + aib' + iba' + i^2bb'$$

$$= \boxed{aa' - bb' + i(ab' + ba')}$$
- c) l'inverse (pour $z \neq 0$) $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$.

$$= \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)}$$

$$= \frac{\underbrace{a - ib}_{=z} \underbrace{}_{=\bar{z}}}{a^2 + b^2}$$

On vérifie par ailleurs que la somme et le produit sont encore commutatifs :
 $z + z' = z' + z$ et $zz' = z'z$.

À tout nombre complexe : $z = a + ib$, on associe le point du plan M de coordonnées $(a; b)$ dans le repère usuel. On note alors $M(z)$ et on appelle z l'affixe de M .

Définition 2:

Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on appelle conjugué de z , et on note $\bar{z}$, le nombre complexe : $\bar{z} = a - ib$.

Proposition 1(propriétés de la conjugaison)

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$
- $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$



conséquences :

- ① $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{z^n} = \overline{z}^n;$
- ② $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z};$
- ③ $z \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}.$

Exercice 1

[-M1-] Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$(a) \frac{i+5}{(i+3)^2}; \quad (b) \frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i}; \quad (c) \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^2.$$

Plan

- 1 Forme algébrique d'un nombre complexe
- 2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe
 - Module d'un nombres complexe
 - Forme trigonométrique et argument d'un nombre complexe
 - Les exercices du jour
- 3 Forme exponentielle d'un nombre complexe
- 4 Utilisation des nombres complexes en trigonométrie

Définition 3:

Pour $z = a + ib$, on appelle module de z le nombre réel positif : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Proposition 2(propriétés du module)

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|zz'| = |z||z'|$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
- $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$



conséquence :

§ $\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n.$

Proposition 3

- ❶ Tout nombre complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$;
- ❷ De plus, une telle écriture est unique à 2π près, c'est à dire, pour $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, θ_1 et θ_2 deux réels, nous avons :

$$r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi] \end{cases} .$$

Définition 4:

- 1 Pour $z \neq 0$, l'écriture $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z ;
- 2 Le réel θ de l'écriture ci-dessus est appelé argument de z .



On dit **UN** argument, et non pas **L'** argument.

notation : On note $\arg(z)$ un argument de z .

Proposition 4(propriétés de l'argument)

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Alors :

- 1 $\arg(z z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$;
- 2 $\arg(z^{-1}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$;
- 3 $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$;
- 4 $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$.



conséquence :

§ Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$.

Exercice 2

■ [-M1-] Calculer $|(1 + i)^{26}|$.

Exercice 3

■ [-M1-] Résoudre l'équation $|z - 1| = |z + i|$.

Exercice 4

■ [-M1-] Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, |z + z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z'}) + |z'|^2$.

Exercice 5

[-M2-] Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

(a) $-1 - i$; (b) $1 - i\sqrt{3}$; (c) $\frac{(\sqrt{3} - i)^4}{1 + i}$.

Plan

- 1 Forme algébrique d'un nombre complexe
- 2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe
- 3 Forme exponentielle d'un nombre complexe
 - la formule d'Euler
 - la formule de De Moivre
 - factorisations par l'angle moitié
 - Exponentielle d'un nombre complexe
 - Les exercices du jour
- 4 Utilisation des nombres complexes en trigonométrie

⇒ Définitions et premières propriétés :

Définition 5:

■ Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Proposition 5

■ Pour θ et θ' deux nombres réels, nous avons : $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$.



conséquences :

① $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta} ;$

② $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} ;$

③ $\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} .$

⇒ Forme exponentielle d'un nombre complexe :

Proposition 6

❶ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $z = re^{i\theta}$.

❷

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi] \end{cases} .$$

REMARQUE : L'écriture $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée forme exponentielle. Nous avons ainsi : $re^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

Proposition 7

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\end{aligned}$$

Proposition 8

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

- ❶ $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad 1 + e^{i\theta} = 2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\theta/2};$
- ❷ $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad 1 - e^{i\theta} = -2i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) e^{i\theta/2}.$

Définition 6:

Soit $z \in \mathbb{C}$. L'exponentielle du nombre complexe z est notée e^z ou $\exp(z)$ et est défini par :

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \times e^{i\operatorname{Im}(z)}$$

, où $e^{\operatorname{Re}(z)}$ représente l'exponentielle réelle.

Proposition 9(propriétés algébriques)

Pour z et z' deux nombres complexes. Alors :

① $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$;

② $(e^z)^{-1} = e^{-z}$;

③ $e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$;

④ $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

Proposition 10

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

$$\exp(z) = \exp(z') \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / z = z' + 2\pi ki$$

Exercice 6

[-M3-] Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

(a) $-3e^{7i\pi/8}$; (b) $2ie^{i\pi/3}$.

Exercice 7

[-M3-] Mettre sous forme algébrique les nombres complexes : $e^{\ln(6)+i\pi/4}$ et $(1 + e^{i\pi/3})^{26}$.

Plan

- 1 Forme algébrique d'un nombre complexe
- 2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe
- 3 Forme exponentielle d'un nombre complexe
- 4 Utilisation des nombres complexes en trigonométrie
 - Linéarisation d'expressions trigonométriques
 - Délinéarisation
 - Factorisation de $a \cos(x) + b \sin(x)$.
 - Les exercices du jour

Principe : Se débarrasser des facteurs dans une expression trigonométrique.

Exemple : $\cos(x) \sin(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

Plus généralement, une linéarisation systématique s'obtient en utilisant les formules d'Euler :

Principe : On exprime $\cos(px)$ et $\sin(px)$ à l'aide de puissances de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exemple : $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$.

Plus généralement, une délinéarisation systématique peut s'obtenir en utilisant les formules de De Moivre.

On suppose a et b non nuls simultanément.

Proposition 11

Il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, a \cos(x) + b \sin(x) = r \cos(x - \theta)$.

Exemple : Factorisation de $\cos(x) + \sin(x)$.

- On calcule $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- On factorise par r : $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) \right)$.
- On cherche φ tel que : $\begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ On prend par exemple : $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
- Ainsi : $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(x) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x) \right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 8

■ [-M4-] Linéariser $\sin^4(x)$ sachant que $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

Exercice 9

■ [-M4-] Délinéariser $\sin(3x)$.

Exercice 10

■ [-M4-] Résoudre l'équation $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = 1$.

