Calcul matriciel

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Plan

Définition :

Soient n et p deux entiers strictement positifs.

1. On appelle matrice de taille np et à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n lignes et p colonnes. On note : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$, avec $a_{ij} \in \mathbb{K}$;
2. On dit que deux matrices de taille np et à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont égales lorsque leurs coefficients sont égaux ;
3. On note :
   - $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille np et à coefficients dans $\mathbb{K}$,
   - 0_{np} l'élement de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0,
4. Lorsque $p = n$, on dit que la matrice est carrée, et on écrit plus simplement :
   - $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$,
   - 0_n au lieu de 0_{nn}.

Définition :

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq m}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq m}}, \lambda \in \mathbb{K}$, on note :

1. $A + B$ la matrice de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, de coefficients :

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], \quad a_{ij} + b_{ij};$$

2. λA la matrice de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, de coefficients :

$$\forall i \in [\![1; n]\!]; \forall j \in [\![1; p]\!], \quad \lambda a_{ij}.$$

Exemple : Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:

- $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;
- $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;
- $3A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition (structure d'espace vectoriel)

1. $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe abélien. Plus précisément :
   - Pour tous $(A;\ B) \in (\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}))^2$, $A+B=B+A$;
   - L'élément neutre est 0_{np}, c'est à dire : $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),\ 0_{np}+A=A$
   - Le symétrique de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est $-A$: $A+(-A)=0_{np}$.
2. Pour A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et λ, μ deux éléments de $\mathbb{K}$ quelconques :
   - $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
   - $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

Exercice

Résoudre dans $\mathcal{M}_{32}(\mathbb{K})$ l'équation : $2X+B=0_{32}$, avec $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$.

Définition :

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{rp}(\mathbb{K})$, on appelle produit de A et B, et on note $AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ la matrice telle que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}.$$

Proposition (propriétés du produit matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$, $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$;
2. pour $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$, $(A+B)C = AC + BC$;
3. pour $B \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$, $A(B+C) = AB + AC$;
4. pour $B \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{rs}(\mathbb{K})$,$(AB)C = A(BC)$;
5. $0_{rn}A = 0_{rp}$ et $A0_{pr} = 0_{nr}$.

Exercice

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les matrices précédentes.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,m}$ alors

$$AB = (AC_1 \cdots AC_m)$$

où $C_1, \cdots, C_m$ sont les colonnes de B.

$$AB = \begin{pmatrix} L_1 B \\ \vdots \\ L_n B \end{pmatrix}$$

où $L_1, \cdots, L_m$ sont les lignes de A.

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de A et on note ${}^tA$ (ou A^T) la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1;\ p]\!], \forall j \in [\![1\ ; n]\!], \quad a'_{ij} = a_{ji}.$$

REMARQUE : Autrement dit, ${}^tA$ s'obtient à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes.

Proposition (propriétés de la transposition)

1. Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, ${}^t({}^tA) = A$;
2. Pour A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$;
3. Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$;
4. Pour $A \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{rp}(\mathbb{K})$, ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.

➪ Matrices triangulaires :

Définition :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est :

1. triangulaire supérieure lorsque : $a_{ij} = 0$ pour $i > j$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

   Si de plus $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$, on dit que A est strictement triangulaire supérieure ;

2. triangulaire inférieure lorsque : $a_{ij} = 0$ pour $i < j$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

   Si de plus $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 0$, on dit que A est strictement triangulaire inférieure ;

3. diagonale lorsque : $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

   Si de plus $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn}$, on dit que A est scalaire.

⇨ Matrices triangulaires :

Proposition (propriétés des matrices triangulaires)

Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures (resp.inférieures). Alors :

1. $A + B$ est triangulaire supérieure (resp.inférieure) ;
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, λA est triangulaire supérieure (resp.inférieure) ;
3. AB est triangulaire supérieure (resp.inférieure).

⇨ Matrices symétriques et antisymétriques :

Définition :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est :

1. symétrique lorsque : ${}^tA = A$:
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques.
2. antisymétrique lorsque : ${}^tA = -A$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Proposition

Soient A et B deux matrices symétriques (resp. antisymétriques). Alors :

(a) $A+B$ est symétrique (resp. antisymétrique) ;

(b) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, λA est symétrique (resp. antisymétrique).

Le produit de deux matrices symétriques n'est pas forcément symétrique. De même pour les matrices antisymétriques. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, nous avons A et B symétriques, mais $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique.

Exercice

Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose : $S = A\ {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que S est symétrique.

Plan

Définition :

La matrice identitée noté $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est telle que tous ses coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux égaux à 1.

Proposition

$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), AI_n = I_nA = A$. On dit que I_n est l'élément neutre pour la multiplication dans $M_n(\mathbb{K})$.

REMARQUE : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que le produit matriciel est une loi de composition interne pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit matriciel est :

- associatif : $A(BC) = (AB)C$;
- non commutatif : $AB \neq BA$ en toute généralité.

notation : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note : $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ et pour tout $n \geq 2$, $A^n = \underbrace{AA\dots A}_{n \text{ termes}}$.

REMARQUE : nous avons $A^{n+1} = AA^n = A^nA$.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

Proposition (binôme de Newton)

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, c'est à dire tels que : $AB = BA$. Alors $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B^k A^{n-k}$.

Il faut absolument vérifier $AB = BA$. En effet, sinon, pour $n = 2$, $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + \underbrace{AB + BA}_{\neq 2AB \text{ en toute généralité}} + B^2$.

Exercice

En écrivant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible lorsque A admet un symétrique pour le produit matriciel, c'est à dire lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que : $AB = BA = I_n$.

notations : On note
$\bullet A^{-1}$ le symétrique de A lorsqu'il existe. On dit aussi que A^{-1} est l'inverse de A.
$\bullet \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Exercice

Étudier l'inversibilité des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition (propriétés algébriques des matrices inversibles)

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ muni du produit matriciel est un groupe. Plus précisement :
   1. Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et l'inverse de A^{-1} est A : $(A^{-1})^{-1} = A$;
   2. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Plan

Soient :

- $(S) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$ un système linéaire de n équations, à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sa matrice augmentée ;
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$ le vecteur (ou matrice colonne) inconnu(e).

Alors le produit $AX \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et :

$$AX = B, \text{ avec } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*, (i,j) \in [\![1;\ n]\!]^2, i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Une matrice élémentaire est :

1. une matrice de dilatation $D_i(\lambda) = diag(1, \cdots, 1, \lambda, 1, \cdots, 1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
$$D_i(\lambda) = \sum_{k=1, k\neq i}^{n} E_{kk} + \lambda E_{ii}.$$
2. une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}.$$
3. une matrice de transposition $P_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
$$P_{ij} = \sum_{k=1, k\neq i, k\neq j}^{n} E_{kk} + E_{ij} + E_{ji}.$$

Proposition

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$; $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $(i;\ j) \in [\![1;\ n]\!]$, $(i \neq j)$. Effectuer l' opération élémentaire suivante sur les lignes de la matrice (ou du système) :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est équivalent à multiplier A à gauche par $D_i(\lambda)$.

$$A \underset{L_i \leftarrow \alpha L_i}{\sim} B \Leftrightarrow D_i(\lambda)A = B.$$

- $L_i \leftrightarrow L_j$ revient à multiplier A à gauche par P_{ij}

$$A \underset{L_i \leftrightarrow L_j}{\sim} B \Leftrightarrow P_{ij}A = B.$$

- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ revient à multiplier la matrice A à gauche par $T_{ij}(\lambda)$.

$$A \underset{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}{\sim} B \Leftrightarrow T_{ij}(\lambda)A = B.$$

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles et $\forall(i;j) \in [\![1;\ n]\!]^2 (i \neq j)$:

1. $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$;
2. $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$;
3. $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice échelonnée réduite en lignes $R \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $E \in GL_n(\mathbb{K})$ (E est un produit de matrices élémentaires) telles que $A = ER$.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible ;

(ii) A est équivalente par lignes à I_n ;

(iii) L'équation $AX = 0$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ n'admet que la solution nulle ;

(iv) Pour tout B de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution ;

(v) Pour tout B de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Exercice

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.