Chapitre 24

Matrices de vecteurs et d'applications linéaires

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

On note dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Plan

1. Généralités
   - Matrice d'une famille de vecteurs dans une base
   - Matrice d'une application linéaire
   - Opérations matricielles et applications linéaires
2. Formules de changement de base
3. Adaptation des résultats aux matrices
4. Exemples venus de la géométrie

Définition :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. On appelle vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ d'un vecteur $x \in E$, et on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x)$, le vecteur colonne dont les coefficients sont les composantes de x dans $\mathbb{K}$: Si $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$, alors
$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \, ;$$
2. On appelle matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ dans $\mathcal{B}$, et on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{np}$, la matrice dont la j-ème colonne est le vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ de u_j.

Proposition

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et x et y sont des vecteurs de E, alors : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(y) \Leftrightarrow x = y$, où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

notations :

on note
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E ;
- F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}'$ une base de F ;
- $f : E \to F$ une application linéaire.

Définition :

On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et on note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice de $\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}'$, où $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.

Proposition

Soient $f : E \to F$ une application linéaire et :

- $x \in E$ de vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ noté X ;
- $y = f(x)$ de vecteur colonne dans $\mathcal{B}'$ noté Y ;
- $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Alors : $Y = AX$.

➪ Somme et multiplication par un scalaire :

Proposition

Soient :

- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p de base $\mathcal{B}$.
- F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n de base $\mathcal{B}'$.

Alors : $\varphi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par : $\varphi(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier :

- $\underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g)}_{\varphi(f+g)} = \underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}_{\varphi(f)} + \underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)}_{\varphi(g)}$;
- $\underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f)}_{\varphi(\lambda f)} = \lambda \underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}_{\varphi(f)}$.

Exemple : Si f et g sont deux applications linéaires de matrices respectives dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(2f - g) = 2A - B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

➪ Composition :

Proposition

Soient :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et de base $\mathcal{B}$
- F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie r et de base $\mathcal{B}'$
- G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et de base $\mathcal{B}''$.

On considère également f et g deux applications linéaires telles que :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G.$$

Alors : $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Exemple : On note $\mathcal{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $\mathcal{C}_3$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. Soient $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ et $g : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ deux applications linéaires telles que $A = Mat_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = Mat_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

- $Mat_{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_3}(g \circ f) = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- $Mat_{\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_2}(f \circ g) = BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

➪ Cas des endomorphismes :

notations : on note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E.

Définition :

On appelle matrice associée à f dans $\mathcal{B}$, et on note $Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$, c'est à dire : $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$. .

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases différentes, alors $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id) \neq I_n$. Par exemple, si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, alors $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, alors $Mat_{\mathcal{B}}(f \circ g) = Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(g)$.

Exercice

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que f est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

Plan

1. Généralités
2. Formules de changement de base
   - Matrices de passages d'une base à une autre
   - Formules de changement de base pour les vecteurs
   - Formules de changement de base pour les applications linéaires
3. Adaptation des résultats aux matrices
4. Exemples venus de la géométrie

Définition :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.

1. La famille $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.
2. Si $\mathcal{B}'$ est une base de E, alors : $\boxed{P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}.}$

Exercice

Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On considère un vecteur x de E
- de vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ noté X
- de vecteur colonne dans $\mathcal{B}'$ noté X'.

Alors : $X = PX'$, où $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

notations :

On note dans cette sous-section :
- E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p
- F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

Proposition

1. Soient •$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E
   •$\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux bases de F,
   et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors :
$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{U}'}(f) = (P_{\mathcal{U},\mathcal{U}'})^{-1} Mat_{\mathcal{B},\mathcal{U}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$
2. En particulier, si f est un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors :
$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P, \text{ où } P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

Exercice

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ une autre base.

1. Déterminer $D = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ puis calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. En utilisant les formules de changement de base, exprimer A en fonction de D et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Plan

1. Généralités
2. Formules de changement de base
3. Adaptation des résultats aux matrices
   - Application linéaire canoniquement associée à une matrice
   - Noyau, image et rang d'une matrice
   - Propriétés du rang
4. Exemples venus de la géométrie

Définition :

On appelle application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par $f(X) = AX$.

Proposition

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et f l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ où •$\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$
•$\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$

Définition :

Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle :

(a) noyau de A, et on note $\mathrm{Ker}(A)$, le noyau de son application linéaire canoniquement associée ;

(b) image de A, et on note $\mathrm{Im}(A)$, l'image de son application linéaire canoniquement associée ;

(c) rang de A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de son application linéaire canoniquement associée.

Proposition

Le rang est invariant par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible.

REMARQUE : Ainsi, le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. En effet, elle correspondent à des multiplications à gauche ou à droite par des matrices inversibles (dilatation, transvection, transposition).

conséquence :

$rg(A) = rg({}^tA)$. Autrement dit, le rang d'une matrice A est égal au rang de la famille des lignes de A.

Plan

1. Généralités
2. Formules de changement de base
3. Adaptation des résultats aux matrices
4. Exemples venus de la géométrie
   - Rotations et réflexions dans le plan
   - Rotations et réflexions dans l'espace

➪ rotations :

Définition :

Une rotation vectorielle d'angle θ est une application $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui à un vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ associe le vecteur $r_\theta(\overrightarrow{u})$ vérifiant :

$$\|r_\theta(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\| \ , \ (\overrightarrow{u}, r_\theta(\overrightarrow{u})) = \theta \ [2\pi].$$

et $r_\theta(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

Proposition

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe du plan. Alors la matrice de r_θ dans cette base est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

➪ réflexions :

Définition :

Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle. La symétrie orthogonale ou reflexion par rapport à $\mathcal{D}$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{D}$ et parallèlement à la droite orthogonale à $\mathcal{D}$.

Proposition

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe dont le premier vecteur dirige $\mathcal{D}$. Alors la matrice de s dans cette base est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
2. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de s dans cette base est
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

➪ rotations :
Soit maintenant θ qui ne soit pas multiple de 2π, soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle dirigée par $\overrightarrow{a}$. On note P le plan vectoriel orthogonal à $\mathcal{D}$. Ainsi, $E = P \oplus \mathcal{D}$.

Définition :

La rotation vectorielle d'axe $\mathcal{D}$ d'angle θ est l'endomorphisme r tel que

$$r_{|\mathcal{D}} = id_{|\mathcal{D}}$$

et $r_{|P}$ est la rotation vectorielle de P d'angle de mesure θ.

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormale directe de l'espace telle que $\overrightarrow{k} = \frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$.

Alors la matrice de r d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ dans cette base est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

➪ <u>réflexions :</u> Soit E l'ensemble des vecteurs de l'espace. P désigne un plan vectoriel.

Définition :

La reflexion par rapport à $\mathcal{P}$ est la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$ et parallèlement à la droite orthogonale à $\mathcal{P}$. En particulier, c'est un endormorphisme.

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormale directe telle que $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j} \in \mathcal{P}$. Alors la matrice de s dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice

Déterminer l'expression de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation : $x + y + z = 0$.