Matrices de vecteurs et d'applications linéaires

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- M1 Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans une base.
- M2 Passer du calcul matriciel au calcul algébrique entre applications linéaires et réciproquement.
- M3 Utiliser le calcul matriciel pour faire l'étude d'une application linéaire en dimension finie.
- M4 Savoir calculer des matrices de passage et appliquer les formules de changement de base.
- M5 Savoir déterminer le rang d'une matrice.

On note dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Plan

Définition 1:

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. On appelle matrice des coordonnées (ou vecteur colonne dans $\mathcal{B}$) d'un vecteur $x \in E$, et on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x)$, le vecteur colonne dont les coefficients sont les composantes de x dans $\mathbb{K}$: Si
$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n, \text{ alors } \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \,;$$
2. On appelle matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ dans $\mathcal{B}$, et on note $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice dont la j-ème colonne est $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(u_j)$.

Proposition 1

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et x et y sont des vecteurs de E, alors : $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(y) \Leftrightarrow x = y$, où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

REMARQUE : De plus la matrice coordonnée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des matrices coordonnées. C'est à dire si x et y sont des vecteurs de E, $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E. Alors :

$$\boxed{\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(x) + \mu \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(y).}$$

notations : on note :

•E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E

•F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}'$ une base de F

Définition 2:

On appelle matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et on note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice de $\mathcal{F} = (f(e_1), \ldots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}'$, avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.

Proposition 2

Soient $f : E \to F$ une application linéaire et :

- $x \in E$ de vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ notée X ;
- $y = f(x)$ de vecteur colonne dans $\mathcal{B}'$ notée Y ;
- $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Alors : $Y = AX$.

conséquence :

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E,F)$. Alors :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) \Leftrightarrow f = g.$$

notations : on note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E.

Définition 3:

On appelle matrice associée à f dans $\mathcal{B}$, et on note $Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases différentes, alors $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id) \neq I_n$. Par exemple, si $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et $\mathcal{B}' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2} \right)$, alors :

$$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id) = \begin{array}{cc} id(v_1) & id(v_2) \\ \downarrow & \downarrow \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{array} .$$

Exercice 1

[-M 1-] Prenons B la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère les applications linéaires suivantes :
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'expression : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f((x,y)) = (y, 2x+3y)$,
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'expression : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g((x,y)) = (2x+y, 2x-y)$.

(Q 1) Expliciter : $A = Mat_B^B(f)$ et $C = Mat_B^B(g)$.

(Q 2) Premières opérations.

1. Calculer $f - 2g$ puis $Mat_B^B(f-2g)$. Comparer avec la valeur $A - 2C$.
2. Calculer $f \circ g$ puis $Mat_B^B(f \circ g)$. Comparer avec la valeur AC.
3. Soit $X = Mat_B((x,y)), Y = Mat_B(f(x,y))$. Quel est le lien entre X, Y et A ?

(Q 3)

1. Vérifier que f est un automorphisme et donner f^{-1}.
2. La matrice de A est-elle inversible ? Donner A^{-1}.
3. Quelle est la matrice de f^{-1} dans la base B ? Conclusion ?

Exercice 2

[-M 1-] $\boxed{\text{Chez } \mathbb{R}[X].}$ Soit $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

- Q 1 Montrer que Ψ est linéaire puis donner sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$.
- Q 2 Donner la matrice X_0 de $P = X + 1$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ puis calculer AX_0. Que permet d'obtenir AX_0?

Plan

Proposition 3

Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont tels que : $\forall X \in \mathbb{K}^p, AX = BX$, alors $A = B$.

Proposition 4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors : $\varphi : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par : $\varphi(f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est un isomorphime d'espaces vectoriels. En particulier :

- $\underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f+g)}_{\varphi(f+g)} = \underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}_{\varphi(f)} + \underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)}_{\varphi(g)}$;
- $\underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f)}_{\varphi(\lambda f)} = \lambda \underbrace{Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}_{\varphi(f)}$.

REMARQUE : En particulier, $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ ont la même dimension, donc $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel de dimension np.

Proposition 5

Soients :
- $\bullet E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et de base $\mathcal{B}$
- $\bullet F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie r et de base $\mathcal{B}'$
- $\bullet G$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et de base $\mathcal{B}''$.

On considère également f et g deux applications linéaires telles que : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. Alors :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Lorsque f et g sont des endomorphismes de E, la proposition précédente devient, en prenant $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}' = \mathcal{B}$:

Proposition 6

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, alors $Mat_{\mathcal{B}}(f \circ g) = Mat_{\mathcal{B}}(f) Mat_{\mathcal{B}}(g)$.

Proposition 7

Soit E et F de même dimension égale à n et $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Alors, u est un isomorphisme si et seulement si $Mat_{B,B'}(u)$ est inversible. Dans ce cas :

$$Mat_{B',B}(u^{-1}) = \Big(Mat_{B,B'}(u)\Big)^{-1}$$

Plan

Définition 4:

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et on note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Proposition 8

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E.

1. La famille $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.
2. Si $\mathcal{B}'$ est une base de E, alors : $\boxed{P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}.}$

Proposition 9

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On considère un vecteur x de E
- de vecteur colonne dans $\mathcal{B}$ noté X
- de vecteur colonne dans $\mathcal{B}'$ noté X'.

Alors : $X = PX'$, où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Le lien matriciel entre deux matrices d'une même application linéaire dans deux bases différentes a déjà été conjecturé en exercice (cf. Exercice 1 fiche méthode). La proposition ci-dessous établit sa généralisation.

Proposition 10

1. Soient •$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :
   •$\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux bases de F

   $$Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{U}'}(f) = (P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1} Mat_{\mathcal{B},\mathcal{U}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

2. En particulier, si f est un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors :

   $$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) P, \text{ où } P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Exercice 3

[-M 4-] Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $B' = ((1,2),(1,3))$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe $(-x+y, -6x+4y)$.

- Q 1 Montrer que B' est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Q 2 Donner $P_B^{B'}$ et $P_{B'}^{B}$.
- Q 3 Donner les coordonnées de $u = (1,1)_B$ dans la base B'.
- Q 4 Donner la matrice, noté A, de f dans la base B.
- Q 5 Donner la matrice, noté D, de f dans la base B' en utilisant la formule de passage.

Exercice 4

[-M 4-]
On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (1, (X-1), (X-1)^2)$ et $R = X^2$.

- (Q 1) Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- (Q 2) Déterminer $Mat_{\mathcal{B}}(R)$, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.
- (Q 3) En déduire $Mat_{\mathcal{B}'}(R)$.

Exercice 5

[-M 4-] On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $B = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Calculer B^n et en déduire une expression simple de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

[-M 4-]

(Q 1) Soit p la projection sur un plan $P = \mathrm{Vect}\Big((1,1,1)_u; (1,1,0)_v\Big)$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}\Big((1,0,0)_w\Big)$. Donner alors la matrice de p dans une base adaptée à ces espaces supplémentaires.

(Q 2) Comment obtenir la matrice de p dans la base canonique de l'espace ?

Exercice 7

[-M 4-] Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (-x+2y;-3x+4y) \end{array}$. Alors

- (Q 1) Déterminer $A = Mat_{Bc}^{Bc}(f)$ puis montrer que les noyaux suivants vérifient $\ker(f - id) = \text{Vect}((1,1)_{=u_1})$ et $\ker(f - 2id) = \text{Vect}((2,3)_{=u_2})$.
- (Q 2) Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de f dans cette base.
- (Q 3) Trouver alors une matrice D diagonale semblable à A.

Plan

Définition 5:

On appelle application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par $f(X) = AX$.

Proposition 11

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et f l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ où •$\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$

•$\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$

Définition 6:

Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle :

(a) noyau de A, et on note $\mathrm{Ker}(A)$, le noyau de son application linéaire canoniquement associée ;

(b) image de A, et on note $\mathrm{Im}(A)$, l'image de son application linéaire canoniquement associée ;

(c) rang de A, et on note $\mathrm{rg}(A)$, le rang de son application linéaire canoniquement associée ;

REMARQUE : Le théorème du rang pour les applications linéaires s'écrit : $\dim(\mathbb{R}^p) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$, avec $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ linéaire.
Appliqué à l'application linéaire canoniquement associée à une matrice A cela donne : $\boxed{p = \dim(\ker(A)) + \mathrm{rg}(A)}$.

Proposition 12

1. Le rang de la matrice A est égal au rang des vecteurs colonnes de A.
2. Le rang est invariant par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible.

REMARQUE : Ainsi, le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. En effet, elle correspondent à des multiplications à gauche ou à droite par des matrices inversibles (dilatation, transvection, transposition).

Proposition 13

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$. Autrement dit, le rang d'une matrice A est égal au rang de la famille des lignes de A.

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a. A est inversible ;
b. L'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}), AX = 0$ n'admet que la solution nulle ;
c. Pour tout Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ admet une unique solution ;
d. $\mathrm{rg}(A) = n$.

conséquence :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = I_n$. Alors $BA = I_n$.

Exercice 8

[-M 5-]

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Donner le rang de A. La matrice A est-elle inversible ?
2. De même, $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est-elle inversible ?

Exercice 9

[-M 5-]

1. $\ker(AM) = \ker(M)$.
2. En déduire que $rg(AM) = rg(M)$.