

Matrices de vecteurs et d'applications linéaires

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- ❶ Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans une base.
- ❷ Passer du calcul matriciel au calcul algébrique entre applications linéaires et réciproquement.
- ❸ Utiliser le calcul matriciel pour faire l'étude d'une application linéaire en dimension finie.
- ❹ Savoir calculer des matrices de passage et appliquer les formules de changement de base.
- ❺ Savoir déterminer le rang d'une matrice.

On note dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Plan

1 Généralités

- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base
- Matrice d'une application linéaire
- Cas des endomorphismes
- Les exercices du jour

2 Opérations matricielles et applications linéaires

3 Formules de changement de base

4 Adaptation des résultats aux matrices

Définition 1:

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- 1 On appelle matrice des coordonnées (ou vecteur colonne dans \mathcal{B}) d'un vecteur $x \in E$, et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, le vecteur colonne dont les coefficients sont les composantes de x dans \mathbb{K} : Si

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n, \text{ alors } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n ;$$

- 2 On appelle matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ dans \mathcal{B} , et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice dont la j -ième colonne est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$.

Proposition 1

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et x et y sont des vecteurs de E , alors : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) \Leftrightarrow x = y$, où \mathcal{B} est une base quelconque de E .

REMARQUE : De plus la matrice coordonnée d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des matrices coordonnées. C'est à dire si x et y sont des vecteurs de E , \mathcal{B} est une base quelconque de E . Alors :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + \mu y) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mu \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y).$$

notations : on note :

- E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $p \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{B} une base de E
- F un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{B}' une base de F

Définition 2:

On appelle matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' , et on note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, la matrice de $\mathcal{F} = (f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base \mathcal{B}' , avec $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Proposition 2

Soient $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et :

- $x \in E$ de vecteur colonne dans \mathcal{B} notée X ;
- $y = f(x)$ de vecteur colonne dans \mathcal{B}' notée Y ;
- $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.

Alors : $Y = AX$.



conséquence :

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g) \Leftrightarrow f = g.$$

notations : on note E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{B} une base de E .

Définition 3:

On appelle matrice associée à f dans \mathcal{B} , et on note $Mat_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B} .

Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases différentes, alors $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(id) \neq I_n$. Par exemple, si

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de \mathbb{K}^2 et $\mathcal{B}' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2} \right)$, alors :

$$Mat_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(id) = \begin{array}{cc} id(v_1) & id(v_2) \\ \downarrow & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \end{array} \end{array} .$$



Exercice 1

[-M 1-] Prenons B la base canonique de \mathbb{R}^2 . On considère les applications linéaires suivantes :

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'expression : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (y, 2x + 3y)$,

$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'expression : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g((x, y)) = (2x + y, 2x - y)$.

- 1 Expliciter : $A = \text{Mat}_B^B(f)$ et $C = \text{Mat}_B^B(g)$.
- 2 Premières opérations.
 - 1 Calculer $f - 2g$ puis $\text{Mat}_B^B(f - 2g)$. Comparer avec la valeur $A - 2C$.
 - 2 Calculer $f \circ g$ puis $\text{Mat}_B^B(f \circ g)$. Comparer avec la valeur AC .
 - 3 Soit $X = \text{Mat}_B((x, y)), Y = \text{Mat}_B(f(x, y))$. Quel est le lien entre X, Y et A ?
- 3
 - 1 Vérifier que f est un automorphisme et donner f^{-1} .
 - 2 La matrice de A est-elle inversible? Donner A^{-1} .
 - 3 Quelle est la matrice de f^{-1} dans la base B ? Conclusion?

Exercice 2

[-M 1-] Chez $\mathbb{R}[X]$. Soit $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$.

- 🕒 Montrer que Ψ est linéaire puis donner sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$.
- 🕒 Donner la matrice X_0 de $P = X + 1$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ puis calculer AX_0 . Que permet d'obtenir AX_0 ?

Plan

- 1 Généralités
- 2 Opérations matricielles et applications linéaires
 - Un résultat matriciel utile pour la suite
 - Somme et multiplication par un scalaire
 - Composition
 - Cas des endomorphismes
 - Cas des isomorphismes/automorphismes
- 3 Formules de changement de base
- 4 Adaptation des résultats aux matrices

Proposition 3

| Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont tels que : $\forall X \in \mathbb{K}^p, AX = BX$, alors $A = B$.

Proposition 4

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension p , F un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} une base de E et \mathcal{B}' une base de F . Alors : $\varphi : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie par : $\varphi(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier :

- $$\underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f + g)}_{\varphi(f+g)} = \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)}_{\varphi(f)} + \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(g)}_{\varphi(g)};$$
- $$\underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda f)}_{\varphi(\lambda f)} = \lambda \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)}_{\varphi(f)}.$$

REMARQUE : En particulier, $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ ont la même dimension, donc $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension np .

Proposition 5

Soient :

- E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie p et de base \mathcal{B}
- F un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie r et de base \mathcal{B}'
- G un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et de base \mathcal{B}'' .

On considère également f et g deux applications linéaires telles que : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f).$$

Lorsque f et g sont des endomorphismes de E , la proposition précédente devient, en prenant $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}' = \mathcal{B}$:

Proposition 6

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{L}(E)$, alors $Mat_{\mathcal{B}}(f \circ g) = Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(g)$.

Proposition 7

Soit E et F de même dimension égale à n et $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Alors, u est un isomorphisme si et seulement si $Mat_{B, B'}(u)$ est inversible. Dans ce cas :

$$Mat_{B', B}(u^{-1}) = \left(Mat_{B, B'}(u) \right)^{-1}$$

Plan

- 1 Généralités
- 2 Opérations matricielles et applications linéaires
- 3 Formules de changement de base
 - Matrices de passages d'une base à une autre
 - Formules de changement de base pour les vecteurs
 - Formules de changement de base pour les applications linéaires
 - Les exercices du jour
- 4 Adaptation des résultats aux matrices

Définition 4:

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . On appelle matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , et on note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

Proposition 8

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et \mathcal{B} une base de E .

- 1 La famille $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E si et seulement si $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible.
- 2 Si \mathcal{B}' est une base de E , alors : $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$.

Proposition 9

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . On considère un vecteur x de E

- de vecteur colonne dans \mathcal{B} noté X
- de vecteur colonne dans \mathcal{B}' noté X' .

Alors : $X = PX'$, où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Proposition 10

- 1 Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :
• \mathcal{U} et \mathcal{U}' deux bases de F

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{U}'}(f) = (P_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}'})^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{U}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

- 2 En particulier, si f est un endomorphisme de E et \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E , alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P, \text{ où } P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Exercice 3

[-M 4-] Soit B la base canonique de \mathbb{R}^2 , $B' = ((1, 2), (1, 3))$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui à (x, y) associe $(-x + y, -6x + 4y)$.

1. Montrer que B' est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Donner $P_B^{B'}$ et $P_{B'}^B$.
3. Donner les coordonnées de $u = (1, 1)_B$ dans la base B' .
4. Donner la matrice, notée A , de f dans la base B .
5. Donner la matrice, notée D , de f dans la base B' en utilisant la formule de passage.

Exercice 4

[-M 4-]

On note \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (1, (X - 1), (X - 1)^2)$ et $R = X^2$.

- 1 Justifier que \mathcal{B}' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 2 Déterminer $Mat_{\mathcal{B}}(R)$, $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.
- 3 En déduire $Mat_{\mathcal{B}'}(R)$.

Exercice 5

[-M 4-] On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1 Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^2 et déterminer $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
- 2 Calculer B^n et en déduire une expression simple de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

[-M 4-]

- 1 Soit p la projection sur un plan $P = \text{Vect}\left(\begin{matrix} (1, 1, 1) \\ (1, 1, 0) \end{matrix}\right)$ parallèlement à la droite $\text{Vect}\left(\begin{matrix} (1, 0, 0) \\ (1, 0, 0) \end{matrix}\right)$. Donner alors la matrice de p dans une base adaptée à ces espaces supplémentaires.
- 2 Comment obtenir la matrice de p dans la base canonique de l'espace ?

Exercice 7

[M 4-] Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x; y) \mapsto (-x + 2y; -3x + 4y)$. Alors

- 1 Déterminer $A = \text{Mat}_{B^c}^{B^c}(f)$ puis montrer que les noyaux suivants vérifient $\ker(f - id) = \text{Vect}((1, 1)_{=u_1})$ et $\ker(f - 2id) = \text{Vect}((2, 3)_{=u_2})$.
- 2 Montrer que (u_1, u_2) est une base de \mathbb{R}^2 et donner la matrice de f dans cette base.
- 3 Trouver alors une matrice D diagonale semblable à A .

Plan

- 1 Généralités
- 2 Opérations matricielles et applications linéaires
- 3 Formules de changement de base
- 4 Adaptation des résultats aux matrices
 - Application linéaire canoniquement associée à une matrice
 - Noyau, image et rang d'une matrice
 - Retour sur les différentes caractérisations de l'inversibilité d'une matrice
 - Les exercices du jour

Définition 5:

On appelle application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $f(X) = AX$.

Proposition 11

Soient $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et f l'application linéaire canoniquement associée à A . Alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$ où

- \mathcal{B} est la base canonique de \mathbb{K}^p
- \mathcal{B}' est la base canonique de \mathbb{K}^n

Définition 6:

Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle :

- (a) noyau de A , et on note $\text{Ker}(A)$, le noyau de son application linéaire canoniquement associée ;
- (b) image de A , et on note $\text{Im}(A)$, l'image de son application linéaire canoniquement associée ;
- (c) rang de A , et on note $\text{rg}(A)$, le rang de son application linéaire canoniquement associée ;

REMARQUE : Le théorème du rang pour les applications linéaires s'écrit : $\dim(\mathbb{R}^p) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f)$, avec $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire.

Appliqué à l'application linéaire canoniquement associée à une matrice A cela

donne : $p = \dim(\ker(A)) + \text{rg}(A)$.

Proposition 12

- 1 Le rang de la matrice A est égal au rang des vecteurs colonnes de A .
- 2 Le rang est invariant par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible.

REMARQUE : Ainsi, le rang est invariant par opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. En effet, elle correspondent à des multiplications à gauche ou à droite par des matrices inversibles (dilatation, transvection, transposition).

Proposition 13

| $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$. Autrement dit, le rang d'une matrice A est égal au rang de la famille des lignes de A .

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est inversible ;
- (b) L'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $AX = 0$ n'admet que la solution nulle ;
- (c) Pour tout Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ admet une unique solution ;
- (d) $\text{rg}(A) = n$.



conséquence :

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = I_n$. Alors $BA = I_n$.

Exercice 8

[-M 5-]

- 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Donner le rang de A . La matrice A est-elle inversible ?
- 2 De même, $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est-elle inversible ($n \geq 2$) ?

Exercice 9

[-M 5-] Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

- 1 Montrer que $\ker(AM) = \ker(M)$.
- 2 En déduire que $rg(AM) = rg(M)$.