Chapitre 12

Limites et continuité de fonctions

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

Notations : On note, sauf mentions contraires :

- f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$;
- x_0 un point de I ou une borne finie de I (exemple : $I =]0;\ +\infty[$ et $x_0 = 0$).

Plan

1. Limites
   - Définitions
   - Généralités
   - Limite à gauche, limite à droite
   - Propriétés
   - Théorèmes d'encadrement
   - Limites de fonctions monotones
2. Continuité
3. Limites et continuité de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
4. Suites récurrentes associées à une fonction continue

⇨ définitions :

Définition :

1. On dit que f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in I \cap [a-\eta;\ a+\eta],\ |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

2. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en x_0 si et seulement si

$$\forall B > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in I \cap [x_0-\eta;\ x_0+\eta],\ f(x) \geq B;$$

3. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en x_0 si et seulement si

$$\forall B > 0,\ \exists \eta > 0\ /\ \forall x \in I \cap [x_0-\eta;\ x_0+\eta],\ f(x) \leq -B;$$

Dans les trois cas, la limite est unique et on la note $\lim\limits_{x_0} f = b$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ ou encore $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} b$, avec $b \in \{L;\ +\infty;\ -\infty\}$.

REMARQUE :
Le η dépend à priori de ε. On rencontre parfois la notation η_ε ;

Proposition

Si f est définie en x_0 et si elle admet une limite en x_0, alors cette dernière est égale à $f(x_0)$.

⇨ Limites en l'infini :

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $+\infty$.

1. On dit que f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0\ /\ \forall x \in I \cap [A; +\infty[,\ |f(x) - L| \leq \varepsilon;$$
2. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si
$$\forall B > 0,\ \exists A > 0\ /\ \forall x \in I \cap [A;\ +\infty[,\ f(x) \geq B;$$
3. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si
$$\forall B > 0, \exists A > 0\ /\ \forall x \in I \cap [A;\ +\infty[,\ f(x) \leq -B.$$

De même, la limite est unique et on utilise les mêmes notations.

⇨ Limites en l'infini :

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $-\infty$.

1. On dit que f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $-\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0\ /\ \forall x \in I \cap]-\infty; -A]; |f(x) - L| \leq \varepsilon;$$

2. On dit que f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall B > 0, \exists A > 0\ /\ \forall x \in I \cap]-\infty; -A]; f(x) \geq B;$$

3. On dit que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall B > 0,\ \exists A > 0\ /\ \forall x \in I \cap]-\infty; -A]; f(x) \leq -B.$$

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

$$\begin{aligned} & f \text{ admet une limite finie } L \text{ en } a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \iff & f - L \text{ admet une limite nulle en } a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \iff & |f - L| \text{ admet une limite nulle en } a \in \overline{\mathbb{R}}.. \end{aligned}$$

⇨ notion de voisinage :

Définition :

1. On appelle voisinage de :
   (a) $x_0 \in \mathbb{R}$ tout intervalle de la forme : $[x_0 - \eta; x_0 + \eta]$ avec $\eta > 0$;
   (b) $+\infty$ tout intervalle de la forme : $[A; +\infty[$ avec $A > 0$;
   (c) $-\infty$ tout intervalle de la forme : $]-\infty; -A]$ avec $A > 0$;

   Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $V(a)$ l'ensemble des voisinages de a.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f vérifie une propriété au voisinage de a si f vérifie la propriété sur un ensemble de la forme : $V \cap I$ où V est un voisinage de a.

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. On dit que f admet L pour limite à droite en x_0 si la fonction $\tilde{f}$ restriction de f à $I \cap]x_0;\ +\infty[$ admet L pour limite en x_0. On note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x > x_0} f(x) = L$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I \cap]x_0; x_0 + \eta], |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

2. On dit que f admet L pour limite à gauche en x_0 si la fonction $\tilde{f}$ restriction de f à $I \cap]-\infty; x_0[$ admet L pour limite en x_0. On note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x < x_0} f(x) = L$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I \cap [x_0 - \eta; x_0[; |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

Proposition

1. Si $x_0 \notin I$, alors f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite à droite et à gauche en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
2. Si $x_0 \in I$, alors f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet une limite à droite et à gauche en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Exercice

Montrer que $\lfloor . \rfloor$ n'admet pas de limite en tout entier relatif.

⇨ limite et suite numérique :

Proposition Caractérisation séquentielle de la limite en un point.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Soit (u_n) une suite d'élements de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Si f admet b pour limite en a, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.
2. Si quelque soit la suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers b alors f admet une limite en a et $\lim\limits_{a} f = b$.

Exemple : On peut utiliser ce résultat de deux façons différentes :

- Obtenir les limites de suites numériques ;
- Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point.

⇨ Comportement local d'une fonction et limite :

Proposition

Si f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée sur un voisinage de a.

REMARQUE : *La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction cosinus est bornée sur $\mathbb{R}$ donc sur un voisinage de $+\infty$, mais n'admet pas de limite en $+\infty$.*

⇨ Opérations et limites :

Pour les opérations usuelles, on reprend la fiche du cours **ETUDES DE FONCTIONS**. Grâce à la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et aux résultats sur les limites des suites dans le cours **SUITE DE NOMBRES**, on démontre tous les résultats facilement. Par exemple :

Proposition

Si $\lim_a f = L$ et $\lim_a g = L'$ avec $L, L' \in \mathbb{R}$, alors $\lim_a (f+g) = L + L'$.

⇨ Opérations et limites :

Proposition

Si f admet b pour limite en a, alors $|f|$ admet $|b|$ pour limite en a (par convention on pose : $|\pm\infty| = +\infty$).

La réciproque n'est pas vraie. Considérons par exemple la fonction f définie par $f(x) = (-1)^{E(x)}$. Nous avons $|f(x)| = 1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Pourtant f n'admet pas de limite en 0.

⇨ Limite et ordre :

Proposition

Si f admet une limite strictement positive en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f est strictement positive au voisinage de a.

Proposition

Soit f une fonction admettant $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si au voisinage de a, $f(x) \geq m$, alors $L \geq m$;
2. Si au voisinage de a, $f(x) \leq M$, alors $L \leq M$;
3. Plus généralement, si au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L'$, alors : $L \leq L'$.

Lorsque l'on passe une inégalité stricte à la limite, l'inégalité devient large

Théorème

Soient f, g et h trois fonctions réelles telles que :

(i) au voisinage de a, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;

(ii) g et h admettent $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$;

Alors f admet une limite en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Théorème (extension aux limites infinies)

Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de a : $f(x) \leq g(x)$.

1. si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$;
2. si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exercice

Déterminer la limite en 0^+ de la fonction définie par $f(x) = \ln(x) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Théorème

Soit f une fonction croissante définie sur $I =]a_1;\ a_2[$, avec $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $a \in I$, alors f admet une limite à droite et à gauche en a et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$;
2. Si f est majorée sur I, alors f admet une limite finie $L \in \mathbb{R}$ en a_2 et $L = \sup\{f(x), x \in I\}$. Sinon $\lim\limits_{x \to a_2} f(x) = +\infty$;
3. si f minorée sur I, alors f admet une limite finie $L \in \mathbb{R}$ en a_1 et $L = \inf\{f(x), x \in I\}$. Sinon $\lim\limits_{x \to a_1} f(x) = -\infty$.

REMARQUES :

(1) Nous avons un résultat analogue lorsque f est décroissante.

(2) Si f admet des limites finies en a et b alors :
$\forall x \in]a : b[\ \lim_a f \leq f(x) \leq \lim_b f$.

- Une fonction non monotone n'admet pas forcément de limite à gauche et à droite d'un point a. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
- L'intervalle doit absolument être ouvert.

Plan

1. Limites
2. Continuité
   - Continuité en un point a appartenant à l'intervalle de définition de f
   - Continuité globale
   - Prolongement par continuité
   - Continuité sur un intervalle et théorème des valeurs intermédiaires
   - Continuité sur un segment
3. Limites et continuité de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
4. Suites récurrentes associées à une fonction continue

RAPPEL : Soit $f : I \to \mathbb{R}, a \in I$. Si f admet une limite en a alors cette limite est égale à $f(a)$.

⇨ continuité en un point :

Définition :

On dit que f est :

1. continue en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0, c'est à dire : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;
2. continue à droite en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$;
3. continue à gauche en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Proposition

f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

Exercice

Étudier la continuité en 2 de f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \in [0;\ 2] \\ x^2 - 2 & \text{sinon.} \end{cases}$

Proposition

Soit f continue en a et soit $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ une suite convergeante vers a. Alors $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Définition :

On dit que f est continue sur D lorsque f est continue en tout point de D.

L'ensemble des fonctions continues sur D est noté $C(D;\mathbb{R})$ ou $C^0(D;\ \mathbb{R})$.

Proposition

1. $C(D;\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.
2. $C(D;\mathbb{R})$ est stable par produit : Si f et g sont continues sur D, alors fg est continue sur D ;
3. Si f est continue sur D et g est continue et ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur D.
4. Si $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ sont continues et $f(D) \subset D'$ alors $g \circ f$ est continue sur D. .

Exercice

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition

Soit f continue sur D et x_0 une borne finie d'un intervalle $I \subset D$ telle que $x_0 \notin D$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 lorsque f admet une limite finie ℓ en x_0. Dans ce cas, on note la fonction $\tilde{f}$ définie sur $D \cup \{x_0\}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \neq x_0 \\ \ell & \text{pour } x = x_0 \end{cases},$$

l'unique prolongement continu en x_0 de la fonction f. Alors $\tilde{f}$ est continue sur $D \cup \{x_0\}$ et est appelée prolongement par continuité de f en x_0.

REMARQUE : Souvent, par abus de notation, on note encore f ce prolongement.

Exercice

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Théorème (des valeurs intermédiaires version 1)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $a; b \in I, a < b$ tels que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors, il existe (au moins) $c \in [a;\ b]$ tel que $f(c) = 0$.

REMARQUES :

(1) La démonstration donne une méthode de calcul d'une valeur approchée du réel c à n'importe quelle précision voulue. C'est la méthode de dichotomie.

(2) Le réel c n'est pas forcément unique.

Théorème (des valeurs intermédiaires version 2)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $(a;\ b) \in I^2$. Alors f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\forall y \in \left\{ \begin{array}{l} [f(a);\ f(b)] \text{ si } f(a) \leq f(b) \\ f(b);\ f(a) \text{ sinon} \end{array} \right. , \exists c \in [a;\ b] / y = f(c).$$

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et f continue sur $\mathbb{R}$. Alors f prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$.

Proposition (caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) I est un intervalle réel ;

(ii) Tout nombre compris entre deux éléments x et y de I appartient à I.

Théorème des valeurs intermédiaire version 3

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Le théorème est faux si f n'est pas continue ! Par exemple l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction partie entière est $\mathbb{Z}$ qui n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème (Weierstrass)

Toute fonction continue sur $I = [a;\ b]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes, c'est à dire :

1. $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$ est borné.
2. il existe $x_m \in I$ et $x_M \in I$ tels que $f(x_m) = \inf\limits_{x \in I} f(x)$ et $f(x_M) = \sup\limits_{x \in I} f(x)$.

Le théorème n'est pas vérifié lorsque :

(1) l'intervalle n'est pas fermé. C'est par exemple le cas pour $\dfrac{1}{x}$ regardée sur $]0;\ 1]$.

(2) l'intervalle n'est pas borné. C'est par exemple le cas pour e^x regardée sur $\mathbb{R}$.

(3) la fonction f est discontinue. C'est par exemple le cas pour la fonction f définie sur $[0;\ 1]$ par $\left\{\begin{array}{l} f(x) = x \text{ pour } x \in [0;\ 1[\\ f(1) = 0 \end{array}\right.$.

Plan

1. Limites
2. Continuité
3. Limites et continuité de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
   - Les fonctions bornées
   - Limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$
   - Continuité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
4. Suites récurrentes associées à une fonction continue

Soit $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I non vide et non trivial de $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes. Si $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$, on définit les fonctions de I <u>à valeurs dans $\mathbb{R}$</u> suivantes

$$|f| : x \mapsto |f(x)| \quad ; \quad Re(f) : x \mapsto Re(f(x)) \quad ; \quad Im(f) : x \mapsto Im(f(x)).$$

Définition :

On dit que $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ est **bornée** si la fonction à valeurs réelles $|f|$ est majorée. (C'est à dire, $\exists M \in \mathbb{R} \ / \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M$)

Exercice

Montrer que si $f; g : I \to \mathbb{C}$ sont <u>bornées</u> alors il en est de même de $\lambda f + \mu g$ avec $\lambda; \mu \in \mathbb{C}$.

Définition :

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ et a un point de I ou une borne de I. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
La fonction f admet pour limite le complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - \lambda| = 0$.
Dans ce cas, on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lambda$$

Proposition

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a \in I$ (ou une borne de I), les propositions suivantes sont équivalentes :

- f admet pour limite λ en a ;
- $Re(f)$ et $Im(f)$ admettent pour limite respective $Re(\lambda)$ et $Im(\lambda)$ en a.

En utilisant alors cette caractérisation, on obtient :

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{C}, a \in I$ (ou une borne de I.)

- Si f admet pour limite λ en a, alors $\overline{f}$ admet pour limite $\overline{\lambda}$ en a.
- Si f admet une limite en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Proposition

Soient deux fonctions f, g définies sur I à valeurs complexes. Supposons que f et g admettent deux limites ℓ et m en a (appartenant à I ou borne de I) et soient λ et μ des complexes. Alors

- $\lambda f + \mu g$ admet pour limite $\lambda\ell + \mu m$ en a.
- $f \times g$ admet pour limite ℓm en a.
- Si $m \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et admet pour limite $\dfrac{\ell}{m}$ en a.
- Si φ est une application de $\mathbb{R}$ dans x, si $x_0 \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f \circ \varphi)(x) = \ell$.

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$.

- Si f est définie en $a \in I$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ alors f est dite **continue** en a.
- f est dite <u>continue sur I</u> si elle est continue en chaque point de I.
- L'ensemble $C(I, \mathbb{C})$ (ou $C^0(I, \mathbb{C})$) désigne l'ensemble des fonctions continues sur I, à valeurs complexes.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Alors f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Proposition

$\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ est un sous ensemble de $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, stable par produit et par combinaison linéaire.

Plan

1. Limites
2. Continuité
3. Limites et continuité de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.
4. Suites récurrentes associées à une fonction continue
   - Présentation
   - Intervalles stables
   - Monotonie
   - Points fixes
   - Exercice d'application

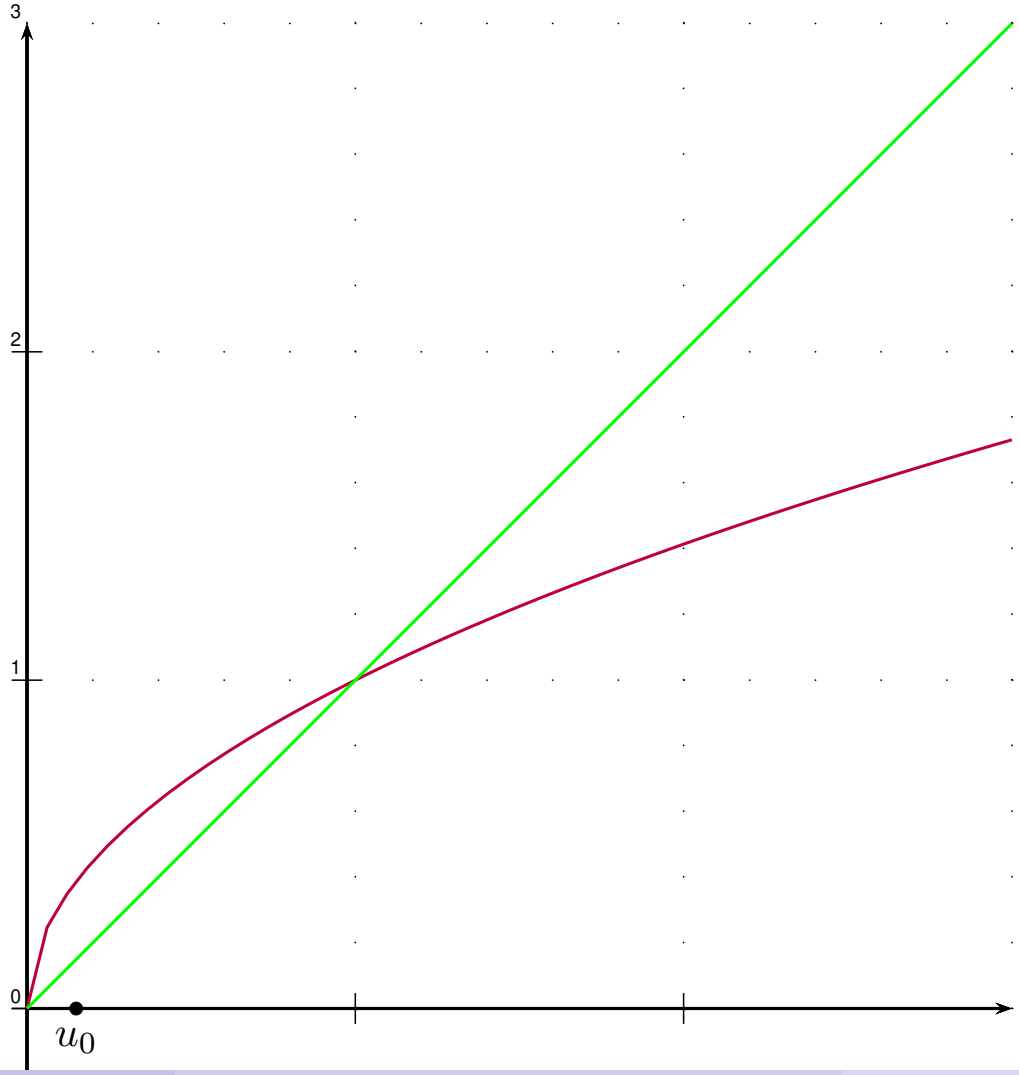
⇨ cadre :

On considère une suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction réelle continue sur un intervalle I.

Par exemple, la suite définie par : $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ est une suite récurrente de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \sqrt{x}$.

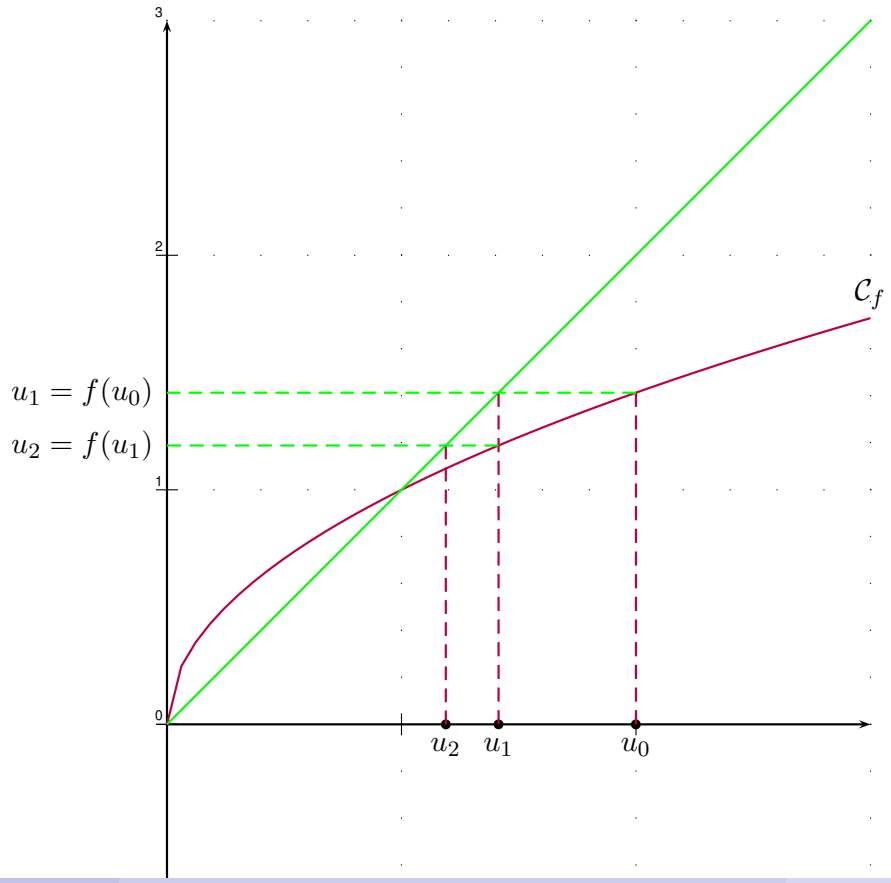
⇨ représentation graphique :

On peut représenter les termes de la suite précédente à l'aide de la courbe représentative de la fonction f :



⇨ représentation graphique :

Si f est croissante, alors (u_n) n'est pas forcément croissante. Par exemple, si $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, alors (u_n) est décroissante. De même si f est décroissante.



Définition :

Soit I un intervalle. On dit que I est un intervalle stable pour f lorsque $x \in I \Rightarrow f(x) \in I$ (c'est à dire : $f(I) \subset I$).

En pratique, lorsqu'on étudie une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, on cherche un intervalle stable I contenant le réel u_0. En effet, si $u_0 \in I$ et $x \in I \Rightarrow f(x) \in I$, alors pour tout entier naturel n, $u_n \in I$. On prouve ce résultat par récurrence.

En pratique, lorsqu'on étudie une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f <u>croissante</u> sur un intervalle stable I associé à (u_n), alors la suite est monotone. On prouve ce résultat par récurrence.

Définition :

On dit que x_0 est un point fixe pour f lorsque : $f(x_0) = x_0$.

Proposition

Si la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un réel ℓ et f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe pour f.

Exercice

On considère la suite définie par $u_0 \in [\sqrt{2};\ +\infty[\cup]-\infty;\ -\sqrt{2}]$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.
Montrer que cette suite converge vers un réel à préciser. Que se passe-t-il pour $u_0 \in]-\sqrt{2};\ \sqrt{2}[-\{0\}$?