# Limites et continuité des fonctions

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Connaître les définitions des différentes limites et les utiliser afin de démontrer des résultats théoriques.
- M2 Démontrer qu'une fonction admet une limite ou pas.
- M3 Étudier la continuité d'une fonction.
- M4 Maîtriser le TVI et ses différentes formes, le théorème de Weierstrass.
- M5 Être autonome sur l'étude des suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$.

**Notations :** On note, sauf mentions contraires :

- $f$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ;
- $x_0$ un point de $I$ ou une borne finie de $I$ (exemple : $I = ]0; +\infty[$ et $x_0 = 0$).

# Plan

➩ Limites en un point :

## Définition 1:

1. On dit que $f$ admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $x_0$ si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in I \cap [x_0 - \eta ; x_0 + \eta], |f(x) - L| \leq \varepsilon;$$
2. On dit que $f$ admet $+\infty$ pour limite en $x_0$ si et seulement si
$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in I \cap [x_0 - \eta ; x_0 + \eta]; f(x) \geq A;$$
3. On dit que $f$ admet $-\infty$ pour limite en $x_0$ si et seulement si
$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \ / \ \forall x \in I \cap [x_0 - \eta ; x_0 + \eta]; f(x) \leq -A.$$

## Proposition 1

Si $f$ est définie en $x_0$ et si elle admet une limite en $x_0$, alors cette dernière est égale à $f(x_0)$.

➩ Limites en l'infini :

## Définition 2:

1. On dit que $f$ admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \ /\ \forall x \in I \cap [B; +\infty[,\ |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

2. On dit que $f$ admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0 \ /\ \forall x \in I \cap [B; +\infty[; f(x) \geq A;$$

3. On dit que $f$ admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0 \ /\ \forall x \in I \cap [B; +\infty[; f(x) \leq -A;$$

## Définition 3:

1. On dit que $f$ admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \ / \ \forall x \in I \cap ]-\infty; -B]; |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

2. On dit que $f$ admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0 \ / \ \forall x \in I \cap ]-\infty; -B]; f(x) \geq A;$$

3. On dit que $f$ admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$ si et seulement si :

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0 \ / \ \forall x \in I \cap ]-\infty; -B]; f(x) \leq -A;$$

## Proposition 2

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

$$\begin{aligned} & f \text{ admet une limite finie } L \text{ en } a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \iff \quad & f - L \text{ admet une limite nulle en } a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \iff \quad & |f - L| \text{ admet une limite nulle en } a \in \overline{\mathbb{R}}.. \end{aligned}$$

➩ Vers une définition générale :

## Définition 4:

1. On appelle voisinage de :
   - (a) $x_0 \in \mathbb{R}$ tout intervalle de la forme : $[x_0 - \eta; x_0 + \eta]$ avec $\eta > 0$ ;
   - (b) $+\infty$ tout intervalle de la forme : $[A; +\infty[$ avec $A > 0$ ;
   - (c) $-\infty$ tout intervalle de la forme : $]-\infty; -A]$ avec $A > 0$ ;

   Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $V(a)$ l'ensemble des voisinages de $a$.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ vérifie une propriété au voisinage de $a$ si $f$ vérifie la propriété sur un ensemble de la forme : $V \cap I$ où $V$ est un voisinage de $a$.

$$\forall (a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = b$$
$$\Leftrightarrow \quad \forall V \in V(b),\ \exists W \in V(a) \ / \ \forall x \in W \cap I,\ f(x) \in V.$$

## Définition 5:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. On dit que $f$ admet $L$ pour limite à droite en $x_0$ si la fonction $\tilde{f}$ restriction de $f$ à $I \cap ]x_0;\ +\infty[$ admet $L$ pour limite en $x_0$. On note $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x > x_0} f(x) = L$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I \cap ]x_0; x_0 + \eta], |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

2. On dit que $f$ admet $L$ pour limite à gauche en $x_0$ si la fonction $\tilde{f}$ restriction de $f$ à $I \cap ]-\infty; x_0[$ admet $L$ pour limite en $x_0$. On note $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x < x_0} f(x) = L$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I \cap [x_0 - \eta; x_0[; |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

L'inégalité est stricte à gauche et à droite. Autrement dit, on exclut le réel $a$ du voisinage.

## Proposition 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose qu'il existe un voisinage $V$ de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f$ sur $V \cap ]x_0; +\infty[$ et $V \cap ]-\infty; x_0[ \neq \emptyset$ (autrement dit $x_0$ n'est pas une borne de $I$ et $f$ n'est pas forcément défini en $x_0$).

- Si $x_0 \notin I$, alors $f$ admet une limite en $x_0$ si et seulement si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.
- Si $x_0 \in I$, alors $f$ admet une limite en $x_0$ si et seulement si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

⇨ Limite et suite numérique :

**Proposition 4 Caractérisation séquentielle de la limite en un point.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Soit $(u_n)$ une suite d'élements de $I$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Si $f$ admet $b$ pour limite en $a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.
2. Si quelque soit la suite $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tendant vers $a$, la suite $(f(u_n))$ tend vers $b$ alors $f$ admet une limite en $a$ et $\lim\limits_{a} f = b$.

➩ Opérations et limites :

**Proposition 5**

Si $\lim_a f = L$ et $\lim_a g = L'$ avec $(L, L') \in \mathbb{R}^2$, alors $\lim\limits_{a}(f + g) = L + L'$.

⇨ Comportement local d'une fonction et limite :

## Proposition 6

Si $f$ admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f$ est bornée sur un voisinage de $a$.

## ➩ Limite et ordre :

### Proposition 7

Si $f$ admet une limite strictement positive en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $f$ est strictement positive au voisinage de $a$.

### Proposition 8

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies au voisinage de $a$ sauf éventuellement en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et telles que : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L' \in \mathbb{R}$. Si au voisinage de $a$, $f(x) \leq g(x)$ alors : $L \leq L'$.

Lorsque l'on passe une inégalité stricte à la limite, l'inégalité devient large.

## Théorème 1

Soient $f$, $g$ et $h : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions réelles définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et telles que :

- au voisinage de $a$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ;
- $g$ et $h$ admettent $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $a$ ;

Alors $f$ a une limite en $a$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

## Théorème 2extension aux limites infinies.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que sur un voisinage de $a$ : $f(x) \leq g(x)$.

1. *(dit de minoration)* si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$ ;
2. *(dit de majoration)* si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

## Théorème 3

Soit $f$ une fonction croissante définie sur $I = ]a_1; \ a_2[$, avec $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $a \in I$, alors $f$ admet une limite à droite et à gauche en $a$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$;
2. Si $f$ est majorée sur $I$, alors $f$ admet une limite finie $L \in \mathbb{R}$ en $a_2$ et $L = \sup\{f(x), x \in I\}$. Sinon $\lim\limits_{x \to a_2} f(x) = +\infty$ ;
3. si $f$ minorée sur $I$, alors $f$ admet une limite finie $L \in \mathbb{R}$ en $a_1$ et $L = \inf\{f(x), x \in I\}$. Sinon $\lim\limits_{x \to a_1} f(x) = -\infty$.

## Exercice 1

[-M1-] En vous aidant de la définition de la limite montrer que : $\lim_{x\to 0} e^x = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty$.

## Exercice 2

[-M2-]
En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, étudier si la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$, définie sur $\mathbb{R}^*$, admet une limite en $0$.

## Exercice 3

[-M2-] Déterminer la limite en $0^+$ de la fonction définie par $f(x) = \ln(x) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

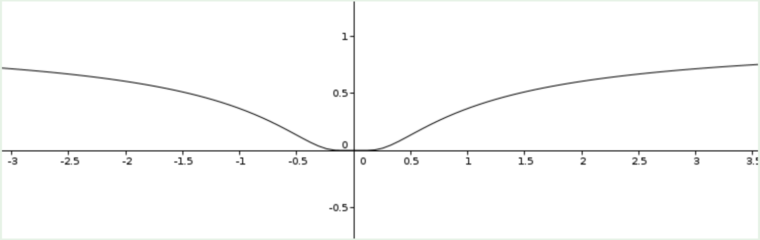
## Exercice 4

[-M2-] On veut montrer que $\ln$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

1. À l'aide du théorème de la limite monotone, justifier que $\ln$ admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$
2. Supposons que cette limite est finie $L$. En observant que $\forall x > 0, \ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$, aboutir à une contradiction.

## Exercice 5

[-M2-] Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{1}{x}), & x < 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}), & x > 0 \end{cases}$




Cette fonction admet-elle une limite en $0$?

# Plan

## Définition 6:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1. On dit que $f$ est continue en $x_0$ lorsque $f$ admet une limite finie en $a$. Cette limite est alors égale à $f(x_0)$.
2. continue à droite en $x_0$ lorsque $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ;
3. continue à gauche en $x_0$ lorsque $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

## Proposition 9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ qui ne soit pas une extrémité de $I$. $f$ est continue en $x_0$ si et seulement si $f$ est continue à droite et à gauche en $x_0$.

## Définition 7:

On dit que $f$ est continue sur $D$ lorsque $f$ est continue en tout point de $D$. L'ensemble des fonctions continues sur $D$ est noté $C(D;\mathbb{R})$ ou $C^0(D;\ \mathbb{R})$.

## Proposition 10

1. $C(D;\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.
2. $C(D;\mathbb{R})$ est stable par produit : Si $f$ et $g$ sont continues sur $D$, alors $fg$ est continue sur $D$ ;
3. Si $f$ est continue sur $D$ et $g$ est continue et ne s'annule pas sur $D$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $D$.
4. Si $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ sont continues et $f(D) \subset D'$ alors $g \circ f$ est continue sur $D$. .

## Proposition 11

Soient $I$ un intervalle, $f$ continue $I - \{x_0\}$ et telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Alors la fonction $\tilde{f}$ définie sur $I \cup \{x_0\}$ par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \neq x_0 \\ \ell & \text{pour } x = x_0 \end{cases},$$

est continue sur $I$. On appelle cette fonction le prolongement par continuité de $f$ sur $I$.

## Théorème 4(des valeurs intermédiaires version 1)

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Soient $a; b \in I, a < b$ tels que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors, il existe (au moins) $c \in [a;\ b]$ tel que $f(c) = 0$.

## Théorème 5(des valeurs intermédiaires version 2)

Soient $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $(a;\ b) \in I^2$. Alors $f$ prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$. Plus précisément :
Si $y$ tel que $y$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ ($y \in [f(a);\ f(b)]$ si $f(a) \leq f(b)$ et $y \in [f(b);\ f(a)]$ sinon).
Alors : $\exists c \in [a;\ b] / y = f(c)$.

## Proposition 12(caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)

Soit $I \subset \mathbb{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $I$ est un intervalle réel ;

(ii) Tout nombre compris entre deux éléments $x$ et $y$ de $I$ appartient à $I$.

## Théorème 6des valeurs intermédiaire version 3

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

## Théorème 7(Weierstrass)

Toute fonction continue sur $I = [a;\ b]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes, c'est à dire :

1. $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$ est borné.
2. il existe $x_m \in I$ et $x_M \in I$ tels que $f(x_m) = \inf_{x \in I} f(x)$ et $f(x_M) = \sup_{x \in I} f(x)$.

## Exercice 6

[-M3-] La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \in [0;\ 2] \\ x^2 - 2 & \text{sinon} \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$ ?

## Exercice 7

[-M3-] Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

## Exercice 8

[-M3-] Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$. Une fonction est $k$-lipschitzienne si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

- (Q 1) On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$. Montrer que $\sin$ est $1$ lipschitzienne sur $[0; +\infty[$.
- (Q 2) Montrer qu'une fonction $k$ lipschitzienne est continue.

## Exercice 9

[-M4-]
Montrer que tout polynôme de degré $3$ admet au moins une racine réelle.

## Exercice 10

[-M4-]
Soit $f : [a, b] \to \boxed{[a, b]}$ continue, montrer que $f$ possède un point fixe, c'est à dire : $\exists \alpha \in [a; b]; f(\alpha) = \alpha$.

# Plan

## Définition 8:

On dit que $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ est **bornée** si la fonction à valeurs réelles $|f|$ est majorée. (C'est à dire, $\exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M$)

## Définition 9:

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ et $a$ un point de $I$ ou une borne de $I$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
La fonction $f$ admet pour limite le complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ en $a$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} |f(x) - \lambda| = 0$.
Dans ce cas, on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lambda$$

## Proposition 13

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a \in I$ (ou une borne de $I$), les propositions suivantes sont équivalentes :

- $f$ admet pour limite $\lambda$ en $a$ ;
- $Re(f)$ et $Im(f)$ admettent pour limite respective $Re(\lambda)$ et $Im(\lambda)$ en $a$.

REMARQUE :

1. Les opérations usuelles sont encore valables.
2. Les théorèmes d'encadrement, de fonctions monotones de passage d'inégalités à la limite ne sont plus valables.

## Définition 10:

Soit $f : I \to \mathbb{C}$.

- Si $f$ est définie en $a \in I$ et si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ alors $f$ est dite **continue** en $a$.
- $f$ est dite continue sur $I$ si elle est continue en chaque point de $I$.
- L'ensemble $C(I, \mathbb{C})$ (ou $C^0(I, \mathbb{C})$) désigne l'ensemble des fonctions continues sur $I$, à valeurs complexes.

## Proposition 14

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Alors $f$ est continue sur $I$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

## Proposition 15

$C(I, \mathbb{C})$ est un sous ensemble de $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, stable par produit et par combinaison linéaire.

## Exercice 11

[-M2-] Déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{e^{ix}-1}{x}$ en $a = 0$.

# Plan

On considère une suite $(u_n)$ définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f$ est une fonction réelle continue sur un intervalle $I$.

## Définition 11:

Soit $I$ un intervalle. On dit que $I$ est un intervalle stable pour $f$ lorsque $x \in I \Rightarrow f(x) \in I$ (c'est à dire : $f(I) \subset I$).

En pratique, lorsqu'on étudie une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, on cherche un intervalle stable $I$ contenant le réel $u_0$. En effet, si $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$, alors pour tout entier naturel $n$, $u_n \in I$. On prouve ce résultat par récurrence.

En pratique, lorsqu'on étudie une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f$ croissante sur un intervalle stable $I$ associé à $(u_n)$, alors la suite est monotone. On prouve ce résultat par récurrence.

## Définition 12:

On dit que $x_0$ est un point fixe pour $f$ lorsque : $f(x_0) = x_0$.

## Proposition 16

Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ et si la suite $(u_n)$ définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers un réel $\ell \in I$, alors $\ell$ est un point fixe pour $f$.

## Exercice 12

[-M5-] Soit $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n}$

- Q 1 On pose $g : x \mapsto e^x - x$. Étudier le signe de $g$.
- Q 2 En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
- Q 3 Étudier le comportement asymptotique de cette suite.

## Exercice 13

[-M5-] On considère la suite définie par $u_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.

- Q 1 On pose $f : x \mapsto \ln(1 + x)$. Vérifier que $[0; +\infty[$ est un intervalle stable pour $f$. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ?
- Q 2 Citer l'inégalité fondamentale du logarithme et en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
- Q 3 Étudier le comportement asymptotique de cette suite.

## Exercice 14

[-M5-]
On considère la suite définie par $u_0 \in [\sqrt{2};\ +\infty[\cup]-\infty;\ -\sqrt{2}]$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$.
Montrer que cette suite converge vers un réel à préciser. Que se passe-t-il pour $u_0 \in ]-\sqrt{2};\ \sqrt{2}[-\{0\}$ ?

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$