

## Limites et continuité des fonctions

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- VI1 Connaître les définitions des différentes limites et les utiliser afin de démontrer des résultats théoriques.
- VI2 Démontrer qu'une fonction admet une limite ou pas.
- VI3 Étudier la continuité d'une fonction.
- VI4 Maîtriser le TVI et ses différentes formes, le théorème de Weierstrass.
- VI5 Être autonome sur l'étude des suites récurrentes :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**Notations :** On note, sauf mentions contraires :

- $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  ;
- $x_0$  un point de  $I$  ou une borne finie de  $I$  (exemple :  $I = ]0; +\infty[$  et  $x_0 = 0$ ).

# Plan

## 1 Limites

- Définitions
- Limite à gauche, limite à droite
- Propriétés
- Théorèmes d'encadrement
- Limites de fonctions monotones
- Les exercices du jour

## 2 Continuité

## 3 Limites, continuité de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ .

## 4 Suites récurrentes associées à une fonction continue

⇒ Limites en un point :

### Définition 1:

- ① On dit que  $f$  admet  $L \in \mathbb{R}$  pour limite en  $x_0$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I \cap [x_0 - \eta; x_0 + \eta], |f(x) - L| \leq \varepsilon;$$

- ② On dit que  $f$  admet  $+\infty$  pour limite en  $x_0$  si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I \cap [x_0 - \eta; x_0 + \eta]; f(x) \geq A;$$

- ③ On dit que  $f$  admet  $-\infty$  pour limite en  $x_0$  si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I \cap [x_0 - \eta; x_0 + \eta]; f(x) \leq -A.$$

### Proposition 1

Si  $f$  est définie en  $x_0$  et si elle admet une limite en  $x_0$ , alors cette dernière est égale à  $f(x_0)$ .

⇒ Limites en l'infini :

## Définition 2:

- ① On dit que  $f$  admet  $L \in \mathbb{R}$  pour limite en  $+\infty$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 / \forall x \in I \cap [B; +\infty[, |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

- ② On dit que  $f$  admet  $+\infty$  pour limite en  $+\infty$  si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0 / \forall x \in I \cap [B; +\infty[; f(x) \geq A;$$

- ③ On dit que  $f$  admet  $-\infty$  pour limite en  $+\infty$  si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0 / \forall x \in I \cap [B; +\infty[; f(x) \leq -A;$$

## Définition 3:

- ① On dit que  $f$  admet  $L \in \mathbb{R}$  pour limite en  $-\infty$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 / \forall x \in I \cap ]-\infty; -B]; |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

- ② On dit que  $f$  admet  $+\infty$  pour limite en  $-\infty$  si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0 / \forall x \in I \cap ]-\infty; -B]; f(x) \geq A;$$

- ③ On dit que  $f$  admet  $-\infty$  pour limite en  $-\infty$  si et seulement si :

$$\forall A > 0, \exists B > 0 / \forall x \in I \cap ]-\infty; -B]; f(x) \leq -A;$$

## Proposition 2

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Alors :

$$\begin{aligned} & f \text{ admet une limite finie } L \text{ en } a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \iff & f - L \text{ admet une limite nulle en } a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \iff & |f - L| \text{ admet une limite nulle en } a \in \overline{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$



⇒ Vers une définition générale :

### Définition 4:

1 On appelle voisinage de :

- (a)  $x_0 \in \mathbb{R}$  tout intervalle de la forme :  $[x_0 - \eta; x_0 + \eta]$  avec  $\eta > 0$  ;
- (b)  $+\infty$  tout intervalle de la forme :  $[A; +\infty[$  avec  $A > 0$  ;
- (c)  $-\infty$  tout intervalle de la forme :  $] - \infty; -A]$  avec  $A > 0$  ;

Si  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , on note  $V(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a$ .

2 Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  vérifie une propriété au voisinage de  $a$  si  $f$  vérifie la propriété sur un ensemble de la forme :  $V \cap I$  où  $V$  est un voisinage de  $a$ .

$$\forall (a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$$\Leftrightarrow \forall V \in V(b), \exists W \in V(a) / \forall x \in W \cap I, f(x) \in V.$$

## Définition 5:

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

- ① On dit que  $f$  admet  $L$  pour limite à droite en  $x_0$  si la fonction  $\tilde{f}$  restriction de  $f$  à  $I \cap ]x_0; +\infty[$  admet  $L$  pour limite en  $x_0$ . On note  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$  ou

$$\lim_{x > x_0} f(x) = L.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I \cap ]x_0; x_0 + \eta], |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

- ② On dit que  $f$  admet  $L$  pour limite à gauche en  $x_0$  si la fonction  $\tilde{f}$  restriction de  $f$  à  $I \cap ]-\infty; x_0[$  admet  $L$  pour limite en  $x_0$ . On note  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$  ou

$$\lim_{x < x_0} f(x) = L.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I \cap [x_0 - \eta; x_0[, |f(x) - L| \leq \varepsilon$$



L'inégalité est stricte à gauche et à droite. Autrement dit, on exclue le réel  $a$  du voisinage.

### Proposition 3

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage de  $x_0 \in \mathbb{R}$  telle que  $I \cap ]x_0; +\infty[ \neq \emptyset$  et  $I \cap ]-\infty; x_0[ \neq \emptyset$ , autrement dit  $x_0$  n'est pas une borne de  $I$ .

- Si  $x_0 \notin I$ , alors  $f$  admet une limite en  $x_0$  si et seulement si 
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$
- Si  $x_0 \in I$ , alors  $f$  admet une limite en  $x_0$  si et seulement si 
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

⇒ Limite et suite numérique :

### Proposition 4 Caractérisation séquentielle de la limite en un point.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- 1 Soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $I$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ . Si  $f$  admet  $b$  pour limite en  $a$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b$ .
- 2 Si quelque soit la suite  $(u_n) \in I^{\mathbb{N}}$  tendant vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))$  tend vers  $b$  alors  $f$  admet une limite en  $a$  et  $\lim_a f = b$ .

⇒ Opérations et limites :

### Proposition 5

Si  $\lim_a f = L$  et  $\lim_a g = L'$  avec  $(L, L') \in \mathbb{R}^2$ , alors  $\lim_a (f + g) = L + L'$ .

⇒ Comportement local d'une fonction et limite :

### Proposition 6

| Si  $f$  admet  $L \in \mathbb{R}$  pour limite en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $f$  est bornée sur un voisinage de  $a$ .

⇒ Limite et ordre :

### Proposition 7

Si  $f$  admet une limite strictement positive en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  alors  $f$  est strictement positive au voisinage de  $a$ .

### Proposition 8

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$  sauf éventuellement en  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et telles que :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L' \in \mathbb{R}$ . Si au voisinage de  $a$ ,  $f(x) \leq g(x)$  alors :  $L \leq L'$ .



Lorsque l'on passe une inégalité stricte à la limite, l'inégalité devient large.

## Théorème 1

Soient  $f, g$  et  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  trois fonctions réelles définies au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  et telles que :

- au voisinage de  $a$ ,  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  ;
- $g$  et  $h$  admettent  $L \in \mathbb{R}$  pour limite en  $a$  ;

Alors  $f$  a une limite en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

## Théorème 2 extension aux limites infinies.

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  telles que sur un voisinage de  $a$  :  $f(x) \leq g(x)$ .

- 1 (dit de minoration) si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  ;
- 2 (dit de majoration) si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .



### Théorème 3

Soit  $f$  une fonction croissante définie sur  $I = ]a_1; a_2[$ , avec  $a_1 \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $a_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ .

- 1 Si  $a \in I$ , alors  $f$  admet une limite à droite et à gauche en  $a$  et
 
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x);$$
- 2 Si  $f$  est majorée sur  $I$ , alors  $f$  admet une limite finie  $L \in \mathbb{R}$  en  $a_2$  et  $L = \sup\{f(x), x \in I\}$ . Sinon  $\lim_{x \rightarrow a_2} f(x) = +\infty$ ;
- 3 si  $f$  minorée sur  $I$ , alors  $f$  admet une limite finie  $L \in \mathbb{R}$  en  $a_1$  et  $L = \inf\{f(x), x \in I\}$ . Sinon  $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x) = -\infty$ .

## Exercice 1

[-M1-] En vous aidant de la définition de la limite montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$   
 et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ .

## Exercice 2

[-M2-]  
 En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, étudier si la fonction  $x \mapsto \sin(1/x)$ , définie sur  $\mathbb{R}^*$ , admet une limite en 0.

## Exercice 3

[-M2-] Déterminer la limite en  $0^+$  de la fonction définie par  $f(x) = \ln(x) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

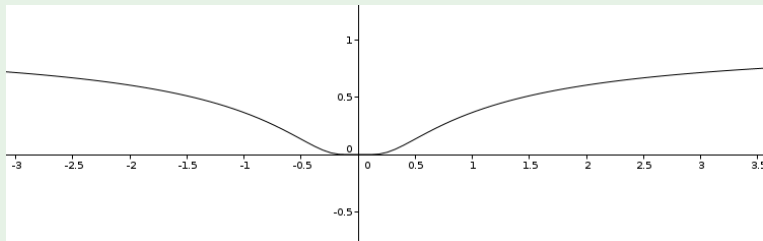
## Exercice 4

[-M2-] On veut montrer que  $\ln$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

- ➊ À l'aide du théorème de la limite monotone, justifier que  $\ln$  admet une limite  $L \in \overline{\mathbb{R}}$  en  $+\infty$
- ➋ Supposons que cette limite est finie  $L$ . En observant que  $\forall x > 0, \ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$ , aboutir à une contradiction.

## Exercice 5

[-M2-] Soit  $f : x \mapsto \begin{cases} \exp(\frac{1}{x}), & x < 0 \\ \exp(-\frac{1}{x}), & x > 0 \end{cases}$



Cette fonction admet-elle une limite en 0?

# Plan

## 1 Limites

## 2 Continuité

- Continuité en un point de l'intervalle de définition de  $f$
- Continuité globale
- Prolongement par continuité
- Théorèmes des valeurs intermédiaires
- Continuité sur un segment
- Les exercices du jour

## 3 Limites, continuité de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ .

## 4 Suites récurrentes associées à une fonction continue

## Définition 6:

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$ .

- ① On dit que  $f$  est continue en  $x_0$  lorsque  $f$  admet une limite finie en  $a$ . Cette limite est alors égale à  $f(x_0)$ . On dit que  $f$  est continue
- ② continue à droite en  $x_0$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$  ;
- ③ continue à gauche en  $x_0$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ .

## Proposition 9

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $x_0 \in I$  qui ne soit pas une extrémité de  $I$ .  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est continue à droite et à gauche en  $x_0$ .

## Définition 7:

On dit que  $f$  est continue sur  $D$  lorsque  $f$  est continue en tout point de  $D$ .  
L'ensemble des fonctions continues sur  $D$  est noté  $C(D; \mathbb{R})$  ou  $C^0(D; \mathbb{R})$ .

## Proposition 10

- 1  $C(D; \mathbb{R})$  est stable par combinaisons linéaires.
- 2  $C(D; \mathbb{R})$  est stable par produit : Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $D$ , alors  $fg$  est continue sur  $D$ ;
- 3 Si  $f$  est continue sur  $D$  et  $g$  est continue et ne s'annule pas sur  $D$ , alors  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $D$ .
- 4 Si  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$  sont continues et  $f(D) \subset D'$  alors  $g \circ f$  est continue sur  $D$ .

## Proposition 11

Soient  $I$  un intervalle,  $f$  continue  $I - \{x_0\}$  et telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ .

Alors la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $I \cup \{x_0\}$  par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \neq x_0 \\ \ell & \text{pour } x = x_0 \end{cases},$$

est continue sur  $I$ . On appelle cette fonction le prolongement par continuité de  $f$  sur  $I$ .



### Théorème 4(des valeurs intermédiaires version 1)

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Soient  $a; b \in I, a < b$  tels que  $f(a)f(b) \leq 0$ . Alors, il existe (au moins)  $c \in [a; b]$  tel que  $f(c) = 0$ .

### Théorème 5(des valeurs intermédiaires version 2)

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $(a; b) \in I^2$ . Alors  $f$  prend toutes les valeurs entre  $f(a)$  et  $f(b)$ . Plus précisément :  
Si  $y$  tel que  $y$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  ( $y \in [f(a); f(b)]$  si  $f(a) \leq f(b)$  et  $y \in [f(b); f(a)]$  sinon).  
Alors :  $\exists c \in [a; b] / y = f(c)$ .

## Proposition 12(caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$ )

Soit  $I \subset \mathbb{R}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $I$  est un intervalle réel ;
- (ii) Tout nombre compris entre deux éléments  $x$  et  $y$  de  $I$  appartient à  $I$ .

## Théorème 6des valeurs intermédiaire version 3

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

## Théorème 7(Weierstrass)

Toute fonction continue sur  $I = [a; b]$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ , est bornée et atteint ses bornes, c'est à dire :

- 1  $f(I) = \{f(x), x \in I\}$  est borné.
- 2 il existe  $x_m \in I$  et  $x_M \in I$  tels que  $f(x_m) = \inf_{x \in I} f(x)$  et  $f(x_M) = \sup_{x \in I} f(x)$ .

## Exercice 6

[-M3-] La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \in [0; 2] \\ x^2 - 2 & \text{sinon} \end{cases}$   
est-elle continue sur  $\mathbb{R}_+$  ?

## Exercice 7

[-M3-] Montrer que la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$  admet un prolongement par continuité sur  $\mathbb{R}$  que l'on précisera.

## Exercice 8

[-M3-] Soit  $k \in \mathbb{R}^+$ . Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ . Une fonction est  $k$ -lipschitzienne si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

- 1 On rappelle que  $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$ . Montrer que  $\sin$  est 1 lipschitzienne sur  $[0; +\infty[$ .
- 2 Montrer qu'une fonction  $k$  lipschitzienne est continue.

## Exercice 9

[-M4-]

Montrer que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle.

## Exercice 10

[-M4-]

Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continue, montrer que  $f$  possède un point fixe, c'est à dire :  $\exists \alpha \in [a; b]; f(\alpha) = \alpha$ .

# Plan

1 Limites

2 Continuité

3 Limites, continuité de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

- Les fonctions bornées
- Limite d'une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$
- Continuité des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .
- Les exercices du jour

4 Suites récurrentes associées à une fonction continue

### Définition 8:

On dit que  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$  est **bornée** si la fonction à valeurs réelles  $|f|$  est majorée. (C'est à dire,  $\exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in I, |f(x)| \leq M$ )



## Définition 9:

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$  et  $a$  un point de  $I$  ou une borne de  $I$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

La fonction  $f$  admet pour limite le complexe  $\lambda \in \mathbb{C}$  en  $a$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - \lambda| = 0$ .

Dans ce cas, on note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda$$

## Proposition 13

Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $a \in I$  (ou une borne de  $I$ ), les propositions suivantes sont équivalentes :

- $f$  admet pour limite  $\lambda$  en  $a$  ;
- $Re(f)$  et  $Im(f)$  admettent pour limite respective  $Re(\lambda)$  et  $Im(\lambda)$  en  $a$ .

REMARQUE :

- 1 Les opérations usuelles sont encore valables.
- 2 Les théorèmes d'encadrement, de fonctions monotones de passage d'inégalités à la limite ne sont plus valables.

## Définition 10:

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ .

- Si  $f$  est définie en  $a \in I$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  alors  $f$  est dite **continue** en  $a$ .
- $f$  est dite continue sur  $I$  si elle est continue en chaque point de  $I$ .
- L'ensemble  $C(I, \mathbb{C})$  (ou  $C^0(I, \mathbb{C})$ ) désigne l'ensemble des fonctions continues sur  $I$ , à valeurs complexes.

## Proposition 14

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors  $f$  est continue sur  $I$  si, et seulement si,  $\operatorname{Re}(f)$  et  $\operatorname{Im}(f)$  le sont.

## Proposition 15

$C(I, \mathbb{C})$  est un sous ensemble de  $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ , stable par produit et par combinaison linéaire.

## Exercice 11

[-M2-] Déterminer la limite de  $x \mapsto \frac{e^{ix} - 1}{x}$  en  $a = 0$ .

# Plan

- 1 Limites
- 2 Continuité
- 3 Limites, continuité de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .
- 4 Suites récurrentes associées à une fonction continue
  - Intervalles stables
  - Monotonie
  - Points fixes
  - Les exercices du jour

On considère une suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = f(u_n)$ , où  $f$  est une fonction réelle continue sur un intervalle  $I$ .

### Définition 11:

Soit  $I$  un intervalle. On dit que  $I$  est un intervalle stable pour  $f$  lorsque  $x \in I \Rightarrow f(x) \in I$  (c'est à dire :  $f(I) \subset I$ ).

En pratique, lorsqu'on étudie une suite  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on cherche un intervalle stable  $I$  contenant le réel  $u_0$ . En effet, si  $u_0 \in I$  et  $f(I) \subset I$ , alors pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \in I$ . On prouve ce résultat par récurrence.

En pratique, lorsqu'on étudie une suite  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  croissante sur un intervalle stable  $I$  associé à  $(u_n)$ , alors la suite est monotone. On prouve ce résultat par récurrence.

## Définition 12:

| On dit que  $x_0$  est un point fixe pour  $f$  lorsque :  $f(x_0) = x_0$ .

## Proposition 16

| Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et si la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_{n+1} = f(u_n)$  converge vers un réel  $\ell \in I$ , alors  $\ell$  est un point fixe pour  $f$ .



## Exercice 12

[-M5-] Soit  $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n}$

- 1 On pose  $g : x \mapsto e^x - x$ . Étudier le signe de  $g$ .
- 2 En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
- 3 Étudier le comportement asymptotique de cette suite.

## Exercice 13

[-M5-] On considère la suite définie par  $u_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ .

- 1 On pose  $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ . Vérifier que  $[0; +\infty[$  est un intervalle stable pour  $f$ . Que peut-on en déduire pour la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  ?
- 2 Citer l'inégalité fondamentale du logarithme et en déduire la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
- 3 Étudier le comportement asymptotique de cette suite.

## Exercice 14

[-M5-]

On considère la suite définie par  $u_0 \in [\sqrt{2}; +\infty[ \cup ]-\infty; -\sqrt{2}]$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ . On pose :  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right)$ .

Montrer que cette suite converge vers un réel à préciser. Que se passe-t-il pour  $u_0 \in ]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[-\{0\}$  ?

