Intégration

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- M1 Savoir encadrer une intégrale.
- M2 Utiliser les sommes de Riemann pour déterminer des limites de suites.
- M3 Savoir étudier une fonction définie par une intégrale.
- M4 Savoir utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

RAPPELS :

- Si f est une fonction continue sur $[a;\ b]$ et à valeurs réelles, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ représentera le nombre réel obtenu en faisant la différence de la valeur de l'aire associée aux valeurs où f est positive avec l'aire associée aux valeurs de f négatives.
- Si f est une fonction de la variable réelle à valeurs complexes et $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$ sont continues, on définit l'intégrale de f sur $[a;\ b]$ en posant :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

- Pour $b < a$, on pose par convention, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$.

Plan

On considère ici des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

⇨ Linéarité :

Proposition 1

pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \lambda \int_a^b g(t)\,dt$;

⇨ Relation de Chasles :

Proposition 2

Si x, y et z appartiennent à $[a;\ b]$, alors :

$$\int_x^y f(t)\,dt = \int_x^z f(t)\,dt + \int_z^y f(t)\,dt.$$

⇨ Positivité :

On suppose que f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, les inégalités n'ayant aucun sens pour des expressions complexes.

Proposition 3

Soit $f \in C([a,b])(a \leq b)$ tels que : $\forall t \in [a; \; b], f(t) \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$.

➩ Croissance :

On suppose que f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, toujours pour les mêmes raisons que ci-dessus.

Proposition 4

Soient $f, g \in C([a,b])$ $(a \leq b)$. Si $\forall t \in [a;\ b], f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

conséquence :

Si $m = \min_{t\in[a;\ b]} f(t)$ et $M = \max_{t\in[a;\ b]} f(t)$, alors :

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).}$$

Il s'agit d'un résultat géométrique, à savoir l'estimation la plus grossière de l'aire d'une fonction par deux rectangles

⇨ Fonction positive d'intégrale nulle :

Proposition 5

Si $f \in C([a,b])$ est positive et telle que : $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors f est la fonction nulle.

Proposition 6

Soit $f \in C([a;\ b])$. Alors $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$

Proposition 7

Soit f une fonction continue sur un segment.

1. Si f est paire,
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
2. Si f est impaire,
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$
3. Si f est T périodique :
$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

Exercice 1

[- M1 -] On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}}\, dt$. Pourquoi u_n est-il bien défini ? En effectuant un encadrement de u_n, montrer que cette suite converge vers 0.

Exercice 2

[- M1 -] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$.

- Q 1 En majorant la fonction intégrée, montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.
- Q 2 Soit $k \geq 1$. Calculer $I_{k-1} + I_k$.
- Q 3 En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)$.

Exercice 3

[- M1 -] En vous aidant d'encadrements, montrer que les suites définies ci-dessous existent et convergent vers 0 :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+t}\,dt; \qquad v_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t^n}\,dt;$$

$$w_n = \int_{1/2}^1 (1+t)^n e^{-nt}\,dt; \quad I_n = \int_0^1 (t-t^2)^n\,dt.$$

Exercice 4

[- M1 -] En vous aidant d'une intégration par parties, montrer que $I_n = \int_0^{\pi/4} t^3\cos(nt)\,dt$ converge vers 0.

Plan

Théorème 1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur I et vérifie de plus : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

conséquences :

1. Toute fonction continue admet donc une primitive sur un intervalle. De plus, pour calculer $\int_a^b f(t)\,dt$, il suffit de pouvoir calculer une primitive de f sur $[a;\ b]$.
2. Si f est de classe C^1 sur un intervalle $[a;\ b]$, alors :
$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$ car f est une primitive de f'.
3. On obtient également l'inégalité triangulaire pour les fonctions à valeurs complexes : si f est de classe C^1 sur $[a;\ b]$, alors :
$|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$ avec $M = \max_{t\in[a;\ b]} |f'(t)|$

Théorème 2

Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I. Alors, pour tout $x, x_0 \in I$, nous avons :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)}_{P_n(x)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt}_{R_n(x)}.$$

conséquences :

1. (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle $[a;\ b]$ et $M = \mathrm{Max}_{t\in[a;\ b]}|f^{(n+1)}(t)|$. Alors :

$$\boxed{\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.}$$

2. (Formule de Taylor-Young (si f est de classe C^{n+1}) Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I $x_0 \in I$. Alors :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o_{x_0}(((x-x_0))^n).}$$

Définition 1:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle sommes de Riemann les deux expressions suivantes :

1. $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$
2. $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$

Théorème 3

Soit f une fonction continue sur $[a;\ b]$. Alors :

- $$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt;$$
- $$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt.$$

But : comment étudier une fonction définie par :

$$x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$$

On l'illustre sur l'exemple : $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{e^t\,dt}{t-1}$.

- Domaine de définition. Le problème est que $\dfrac{e^t}{t-1}$ n'est pas définie en 1. Par continuité de f en dehors de 1 on sait que l'intégrale de f sur un segment n'a de sens que si le segment est inclus dans : $]1;\ +\infty[$ ou $]-\infty;\ 1[$ Or, ici $0 \in]-\infty;\ 1[$. Ainsi, si $x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, alors $[0;\ x^2] \subset]-\infty;\ 1[$. f étant continue sur : $]-\infty;\ 1[$, on en déduit que $\int_0^{x^2} \dfrac{dt}{t-1}$ a un sens et donc que F est définie sur $]-1;\ 1[$.
- Régularité et calcul de dérivé. Toute l'astuce est de comprendre que $F(x) = G(x^2) - G(0)$, où G est une primitive de $\dfrac{e^t}{t-1}$ sur $]-\infty;\ 1]$.
  Alors, toute primitive d'une fonction continue est de classe C^1 sur un intervalle. Ainsi, G est de classe C^1 sur $]-\infty;\ 1]$. Par composition : $G(x^2) - G(0)$ est de classe C^1 sur $]-1;\ 1[$ et donc : F est de classe C^1 sur $]-1;\ 1[$.
  La calcul de la dérivé se fait également par composition :
  $\forall x \in]-1;\ 1[,\ F'(x) = 2xG'(x^2)$. Or $G'(t) = \dfrac{e^t}{t-1}$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall x \in]-1;\ 1[,\ F'(x) = 2x\frac{e^{x^2}}{x^2-1}.}$$

Exercice 5

[- M 2 -] Calculer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

Exercice 6

[- M 3 -] On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt \qquad f_2(x)=\int_2^{2x}\ln^2(t)dt \qquad f_3(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt.$$

1. Montrer que f_1 est définie sur $\mathbb{R}_+$ puis montrer que f_1 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f_2 est définie sur $I=]0;\ +\infty[$ puis montrer que f_2 est de classe C^1 sur I et calculer sa dérivée.
3. Montrer que f_3 est définie sur $I=\mathbb{R}^*$ puis montrer que f_3 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

Exercice 7

[- M 4 -]

(Q 1) Appliquer la formule de Taylor Lagrange à la fonction exponentielle avec $x_0 = 0$, $x \in \mathbb{R}_+$, à un ordre n quelconque pour en déduire que

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \Big(\sup_{t \in [0;x]} e^t \Big) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(Q 2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right)}_{=S_n} = e^x.$$

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$