Géométrie dans le plan

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Manipuler les notions de base et de repère du plan.
- M2 Utiliser les outils de calcul vectoriel.
- M3 Caractériser une droite et en obtenir une équation.
- M4 Idem pour les cercles.
- M5 Étudier des problèmes d'intersection entre droites et cercles.

On notera, sauf mentions contraires, dans ce chapitre :

- $\mathcal{P}$ le plan usuel muni d'une orientation.
- $\mathcal{R} = (O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le repère usuel orienté dans le sens direct (c'est à dire le sens inverse des aiguilles d'une montre).

Plan

➩ Lien entre vecteurs et points du plan :

- Soient A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. On note : $B = A + \overrightarrow{AB}$.
- Étant donnés deux points A et B, on appelle distance de A à B le nombre réel, noté AB ou $d(A, B)$, tel que $d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}||$.

Proposition 1(Relation de Chasles)

Quels que soient les points A, B, C du plan, nous avons $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

➩ Colinéarité :

Définition 1:

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan sont dits colinéaires lorsque : $\exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

⇨ Angles orientés de deux vecteurs :
Pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'angle orienté des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Un angle orienté a infinité de valeurs, mais une unique valeur θ_0 appartenant à l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$. On appelle θ_0 la mesure principale de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On écrit :
$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \theta_0\ [2\pi]$

Proposition 2

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs. Alors :

1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})\ [2\pi]$;
2. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})\ [2\pi]$ (relation de Chasles).

➩ Bases du plan et repères cartésiens :

Définition 2:

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

1. On appelle combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de la forme :
$$\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$$
avec α et β deux nombres réels ;
2. On dit que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathcal{P}$ **si tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.**
3. Si les vecteurs $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ sont orthognaux alors on dit que la base est orthogonale. S'ils sont de plus de norme égal à 1, on dit que la base est orthonormale.
4. On appelle *repère cartésien du plan* tout triplet $(\Omega; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ où Ω est un point du plan et $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ est une base.
5. On dit que le repère est direct lorsque la mesure principale de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ appartient à l'intervalle $]0;\ \pi[$. Sinon, on dit qu'il est indirect.

Proposition 3

Deux vecteurs du plan forment une base si et seulement s'ils sont non colinéaires.

➩ Composantes de vecteurs et coordonnées cartésiennes d'un point :

Définition 3:

Soit $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

- Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan. Alors, *par définition de la base,* il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$. Le couple $(x; y)$ est appelé les composantes de $\overrightarrow{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Soit M un point du plan. Alors ,les composantes $(x; y)$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont appelées les coordonnées cartésiennes du point M. Et on a $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Proposition 4

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{t_1}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{t_2}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$. Alors :
   - $\overrightarrow{t_1}+\overrightarrow{t_2}\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\end{pmatrix}$;
   - $\lambda\overrightarrow{t_1}\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1\\ \lambda\beta_1\end{pmatrix}$.
2. Si $\mathcal{R}$ est un repère cartésien quelconque du plan associé à une base $\mathcal{B}$ et $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$ dans $\mathcal{R}$. Alors (dans $\mathcal{B}$), $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\end{pmatrix}$.

conséquence :

Si I est le milieu de $[AB]$ avec $A(x_A;\ y_A)$ et $B(x_B;\ y_B)$, alors : $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ et $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.

Définition 4:

Soit $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct. Soit $M(x,y)$ un point de ce plan. Un système de coordonnées polaires de M est un couple $(r;\theta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x=r\cos(\theta)$ et $y=r\sin(\theta)$. Dans le plan complexe, l'affixe de M est alors $re^{i\theta}$.

REMARQUEs :

1. Si $M\neq O$. Notons $r=OM\in\mathbb{R}_+$ et soit $\theta\in\mathbb{R}$ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i};\overrightarrow{OM})$. Alors (r,θ) est un système de coordonnées polaires de M.
2. *Lien entre cartésien / polaire.* Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé direct fixé. Soit M de coordonnées (x,y) dans le repère cartésien $\mathcal{R}$ et $(r;\theta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ un système de coordonnées polaires de M. Alors :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & r\cos(\theta)\\ y & = & r\sin(\theta)\\ x^2+y^2 & = & r^2. \end{array}\right.$$
3. On parle bien **d'un** système de coordonnées polaires. Effectivement l'angle θ est défini modulo 2π. On utilisera davantage le système (r,θ) pour $\theta\in]-\pi;\pi]$

Exercice 1

[M1] Le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$?

Exercice 2

[M1]

Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan.
2. Quelles sont les coordonnées des points $M(1,1), N(2,3)$ dans le nouveau repère : $(O;\ \overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v})$?

Plan

Définition 5:

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est le nombre réel défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{cases} ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{si} \quad \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ et } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

REMARQUEs :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$
2. $|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leq ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$ (*Inégalité de Cauchy-Schwartz*).

Interprétation géométrique : soient :

- $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan ;
- A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.
- H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Alors :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times \overline{AH}$,
où $\overline{AH}$ est la mesure algébrique de AH.

Proposition 5

produit scalaire et orthogonalité. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors :

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ orthogonaux } \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0.$$

➩ propriétés vérifiées par le produit scalaire :

Proposition 6admis

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$: le produit scalaire est symétrique ;
2. $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à gauche} \\ \left.\begin{array}{l} (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} \\ (\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à droite} \end{array}\right\} \text{bilinéaire.}$$

conséquence :

- (identité remarquable) $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$.
- (formule de polarisation) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{4}(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2)$.

➩ Expression en base orthonormale :

Proposition 7

. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une **base orthonormale du plan** et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = aa' + bb'.$$

conséquence :

$$AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

REMARQUE : Un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Définition 6:

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Le produit mixte de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ est le nombre réel défini par :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \begin{cases} ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \text{si} \quad \overrightarrow{u} \neq 0 \text{ et } \overrightarrow{v} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

REMARQUEs :

1. $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}] = 0$
2. Si $(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$ est une base orthonormale directe alors $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}] = 1$.
3. Si $(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j})$ est une base orthonormale indirecte alors $[\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}] = -1$.

Proposition 8Produit mixte et colinéarité.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors $[\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}] = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

conséquence :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors : $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \neq 0$.

REMARQUE : Plus précisément : $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base directe du plan si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] > 0$.

➩ Propriétés vérifiées par le produit mixte :

Proposition 9Admis

propriétés vérifiées par le produit mixte. Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- le produit mixte est *antisymétrique* : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$
- linéaire à gauche : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$
  $[\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$
- linéaire à droite : $[\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$
  $[\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$
- Autrement dit, on dit que le produit mixte est bilinéaire.

➩ Expression en base orthonormale **directe** :

Proposition 10

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale **directe** et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = ab' - ba'.$$

Notation : Si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ alors on note : $[\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}] = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$.

Proposition 11Application au calcul d'aire

1. Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :
$$\mathcal{A} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]\right|.$$
2. Soit ABC un triangle d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\right|.$$

Exercice 3

[M2]

Dans une base orthonormale directe, soit $\overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner :

1. $\overrightarrow{v_1}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1})$ soit une base du plan,
2. $\overrightarrow{v_2}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2})$ soit une base orthonormale directe du plan,
3. $\overrightarrow{v_3}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_3})$ soit une base orthonormale indirecte du plan.

Exercice 4

[M2] Soient A, B, C trois points du plan distincts deux à deux. Montrer que :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad \textit{(formule d'Al-Kashi).}$$

Exercice 5

[M2] Dans $\mathcal{R}$, un repère orthonormé direct, soient $A(3;\ 1)$, $B(0;\ -1)$ et $C(-1;\ 2)$.

1. Montrer que le triangle ABC n'est pas isocèle.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Plan

Une droite $\mathcal{D}$ est déterminée :

- soit par la donnée de deux points distincts A et B. On note $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$:

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}] = 0.$$

- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ non nul. On note alors $D = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}] = 0.$$

- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur orthogonal $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$. La droite $\mathcal{D}$ est alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0.$$

Proposition 12

Soit $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé.

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $M(x;\ y)$ un point du plan. Si $M \in \mathcal{D}$ alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $ax + by + c = 0$ avec a et b non nuls simultanément. Une telle équation est appelée équation cartésienne de $\mathcal{D}$;
2. Réciproquement, l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x;\ y)$ dans $\mathcal{R}$ tels que $ax + by + c = 0$ avec a, b, c réels et a et b non nuls simultanément est une droite.

Proposition 13

Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, alors :

- $\overrightarrow{n} = (a, b)$ est un vecteur orthogonal (on dit également $\underline{normal}$) à la droite ;
- $\overrightarrow{u} = (-b, a)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Proposition 14

1. Soit la droite $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ avec $A(x_A; y_A)$ et $\overrightarrow{u} = (a; b)$. Alors

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{array} \right.$$

   On dit qu'on a trouvé un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.

2. Réciproquement, l'ensemble des points du plan :

$$\{(x_A + ta; y_A + tb); t \in \mathbb{R}\}$$

   est une droite passant par A et de vecteur directeur $(a; b)$.

Proposition 15intersection de deux droites

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations cartésiennes respectives : $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$. Alors :

1. si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ou confondues ;
2. si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un unique point dont les coordonnées $(x;\ y)$ sont solutions du système :
$\begin{cases} ax+by=-c \\ a'x+b'y=-c' \end{cases}$

Définition 7:

Soient M un point et $\mathcal{D}$ une droite. On appelle distance de M à $\mathcal{D}$, et on note $d(M,\mathcal{D})$ la plus petite distance MN où N décrit $\mathcal{D}$.

$$d(M,\mathcal{D}) = \inf\{AM; A \in \mathcal{D}\}$$

Théorème 1 **Distance d'un point à une droite**

Soient M un point du plan de coordonnées (x_M, y_M) et D une droite. On note $d(M,D)$ la distance de M à D. Si D a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (dans une base orthonormée) alors

$$d(M,D) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exercice 6

[M3]

1. La droite (AB), avec $A(1;\ 0)$ et $B(0;\ 1)$;
2. la droite perpendiculaire à (AB) passant par A ;
3. La droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passant par B.

Exercice 7

[M3] Soit l'ensemble :

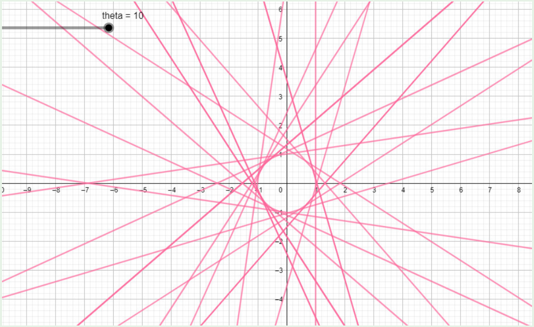
$$\mathcal{D} :\ \forall t \in \mathbb{R}; \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

1. Quel est cet ensemble de points ? Donner ses éléments caractéristiques puis une équation cartésienne.
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $B(1;\ 1)$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 8

[M3]
Soit $\mathcal{D}_\theta : \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ce couple de réels afin que $\mathcal{D}_\theta$ et $\mathcal{D}_{\theta'}$ soient perpendiculaires.
2. Donner alors le point d'intersection de ces deux droites perpendiculaires.



Plan

Définition 8:

Un cercle $\mathcal{C}$ est donné par son centre Ω et son rayon R : $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / \Omega M = R\}$.

Proposition 16

L'ensemble des points M tels que $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\}$ est un cercle de diamètre $[AB]$.

Proposition 17

1. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a;\ b)$ et de rayon R admet une équation, appelée équation cartésienne, de la forme : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;
2. Réciproquement, si $(a;\ b)\in\mathbb{R}^2$ et $c>0$, l'ensemble des points $M(x;\ y)$ du plan tels que : $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(a;\ b)$ et de rayon $\sqrt{c}$.

REMARQUEs :

1. Si $c<0$ l'ensemble des points $M(x;\ y)$ tels que : $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ est l'ensemble vide.
2. Si $c=0$, l'ensemble est réduit à $\Omega(a;\ b)$.

Proposition 18intersection d'un cercle et d'une droite

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{D}$ une droite. Alors :

1. si $d(\Omega,\ \mathcal{D}) < R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en deux points ;
2. si $d(\Omega,\ \mathcal{D}) = R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un seul point M_0. De plus $\mathcal{D}$ est tangente au cercle en M_0 et (ΩM_0) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires ;
3. si $d(\Omega,\ \mathcal{D}) > R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ne se coupent pas.

Exercice 10

[M4] Identifier l'ensemble des points du plan d'équation : $x^2+y^2+6y-23 = 4x$, puis déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 11

[M5]

1. Identifier la nature de l'intersection du cercle unité $\mathcal{C}$ avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + \frac{1}{2}$.
2. Si l'intersection est un point, déterminer ses coordonnées.

Exercice 12

[M5] Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(1;-1)$ et de rayon 2 et soit $\mathcal{D}_m$ la droite passant par $J(0;1)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ pour $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. Étudier suivant les valeurs de m l'intersection entre ces deux objets.