Géométrie dans l'espace

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Manipuler les notions de base et de repère de l'espace.
- M2 Utiliser le calcul vectoriel pour caractériser l'orthogonalité, la colinéarité, la coplanéarité.
- M3 Manipuler les différentes représentations d'une droite, d'un plan dans l'espace.
- M4 Idem avec les sphères et les cercles.

On note $\mathcal{E}$ l'espace usuel et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Plan

1. Repérage dans l'espace
   - Généralités
   - Les coordonnées cartésiennes
   - Coordonnées cylindriques
   - Les exercices du jour
2. Calcul vectoriel dans l'espace
3. Plans de l'espace
4. Droites de l'espace
5. Les sphères

➪ La notion de vecteurs, ainsi que les opérations associées, sont les mêmes que dans le plan.

Définition 1:

On appelle combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tout vecteur $\overrightarrow{t}$ de la forme : $\overrightarrow{t} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$, avec α, β et γ trois nombres réels.

➪ Vecteurs coplanaires.

Définition 2:

On dit que trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires lorsqu'il existe α, β et γ non nuls simultanément tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

➪ Bases de l'espace.

Définition 3:

On dit que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base de $\mathcal{E}$ si tout vecteur s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$;

Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathcal{E}$ et $\overrightarrow{t} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$, on appelle le triplet $(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$ les composantes de $\overrightarrow{t}$ dans $\mathcal{E}$. On note également : $\overrightarrow{t} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Proposition 1

(caractérisation des bases de l'espace) Trois vecteurs de $\mathcal{E}$ forment une base de $\mathcal{E}$ si et seulement s'ils sont non coplanaires.

➪ Angles de vecteurs :

L'orientation d'un plan dans l'espace dépend du choix d'un vecteur orthogonal $\overrightarrow{n}$ au plan défini par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On notera $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'angle orienté de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace.

Définition 4: Coordonnées cartésiennes

1. Soit O un point de l'espace. On dit que $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$ lorsque $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathcal{E}$;
2. Si de plus, $\mathcal{B}$ est orthogonale, directe, orthonormale, on dira que $\mathcal{R}$ est respectivement orthogonal, direct, orthonormé (ou orthonormal).

Proposition 2définition

Soit $\mathcal{R}$ un repère cartésien et $M \in \mathcal{E}$. Alors il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, appelé coordonnées cartésiennes de M dans $\mathcal{R}$, tel que $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$. On note $M(\alpha;\ \beta;\ \gamma)$.

Proposition 3

Soit $\mathcal{R}$ un repère cartésien quelconque de l'espace associé à une base $\mathcal{B}$ et $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ dans $\mathcal{R}$. Alors (dans $\mathcal{B}$), $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

Définition 5:

On se place dans $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ *un repère orthormale direct.* Un système de coordonnées cylindriques de M est un triplet $(r; \theta; z)$ de réels tels que les coordonnées cartésiennes de M soient

$$(r\cos(\theta); r\sin(\theta); z)$$

Exercice 1

[M1] On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base orthonormale directe usuelle et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. On note $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

1. En utilisant la définition, montrer que le vecteur de coordonnées cartésiennes $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}'$. Cette famille est-elle une base de l'espace ?
2. En utilisant la caractérisation des bases par les 3 vecteurs non coplanaires, montrer que cette famille est une base de l'espace.

Plan

1. Repérage dans l'espace
2. Calcul vectoriel dans l'espace
   - Produit scalaire de deux vecteurs
   - Produit vectoriel de deux vecteurs
   - Déterminant (ou produit mixte) de trois vecteurs
   - Les exercices du jour
3. Plans de l'espace
4. Droites de l'espace
5. Les sphères

Définition 6:

1. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ le nombre réel tel que :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
2. Si l'un des vecteurs est nul, on pose : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

REMARQUE : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Proposition 4

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$: le produit scalaire est symétrique ;
2. $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à gauche} \\ \left.\begin{array}{l} (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} \\ (\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à droite} \end{array}\right\} \text{bilinéaire}$$

Proposition 5

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ **une base orthonormale** et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = aa' + bb' + cc'.$$

REMARQUE : En particulier, si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale, alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Définition 7:

- Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. On appelle produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, de norme : $||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$, *orthogonal* à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est **une BASE directe de l'espace.**
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, on pose : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

REMARQUEs :

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux de norme 1, alors $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est **orthonormale directe**.
2. Réciproquement, si $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ est une base orthonormale directe alors $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$.

Proposition 6

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Alors : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 7

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
2. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$: le produit vectoriel est antisymétrique ;
3. $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u} \wedge (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à gauche} \\ \left.\begin{array}{l} (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \\ (\lambda \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à droite} \end{array}\right\}$$

   bilinéaire

Proposition 8

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ **une base orthonormale directe** et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} bc' - cb' \\ -(ac' - ca') \\ ab' - ba' \end{pmatrix}$.

Proposition 9

1. Soit ABC un triangle d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|\right|.$$

2. Soit $ABDC$ un parallélogramme d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :

$$\mathcal{A} = \left|\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|\right|.$$

Définition 8:

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs. On appelle déterminant (ou produit mixte) de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, et on note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ **le réel** : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$.

Proposition 10

1. Pour tous réels λ et μ nous avons :
$$\left.\begin{array}{l}[\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v_1} + \mu\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}] = \lambda\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}] + \mu\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}] \\ [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{w_1} + \mu\overrightarrow{w_2}] = \lambda\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_1}] + \mu\,[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w_2}] \\ [\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \lambda\,[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] + \mu\,[\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]\end{array}\right\} \text{trilinéaire}$$
2. $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}]$. Plus généralement, le déterminant change de signe lorsqu'on échange deux vecteurs (antisymétrie) :
$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$$
3. $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}] = 0$ (alterné).

Proposition 11

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormale directe et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Proposition 12

Soit V le volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Alors :

$$V = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right|.$$

Proposition 13

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace. Alors :

1. $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de l'espace si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \neq 0$;
2. $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base directe de l'espace si et seulement si $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] > 0$.

Exercice 2

[M2] Calculer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, puis déterminer une base ortho**normale** directe à l'aide de ces vecteurs.

Exercice 3

[M2] En notant $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 2)$, calculer l'aire du triangle OAB.

Plan

1. Repérage dans l'espace
2. Calcul vectoriel dans l'espace
3. Plans de l'espace
   - Caractérisations équivalentes d'un plan
   - Equation cartésienne d'un plan
   - Système d'équations paramétriques
   - Distance d'un point à un plan
   - Intersection de deux plans
   - Les exercices du jour
4. Droites de l'espace
5. Les sphères

Un plan $\mathcal{P}$ est donné :

- soit par la donnée de trois points non alignés A, B et C. Alors $\mathcal{P}$ se note $A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et est l'ensemble des points M tels que
$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0;$$
- soit par la donnée d'un point A et de deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ non colinéaires. Alors $\mathcal{P}$ se note $A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ et $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que
$$\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right] = 0;$$
- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\mathcal{P}$. Alors, $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux c'est à dire tels que :
$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0.$$

Proposition 14

Soit $(O;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\ ;\ \overrightarrow{k}\ )$ un repère cartésien orthonormé.

1. Soit $\mathcal{P}$ un plan et $M(x;\ y;\ z)$ un point. Si $M \in \mathcal{P}$ alors il existe des réels a, b, c, d tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c non nuls simultanément. Une telle équation est appelée équation cartésienne ;
2. Réciproquement, l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x;\ y;\ z)$ dans $\mathcal{R}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c réels non nuls simultanément est un plan.

REMARQUE :
Si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$.

Soit $\mathcal{P} = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. Alors $M \in P$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est coplanaire à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ce qui équivaut à $\exists t; t' \in \mathbb{R}; \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$. Ainsi, en utilisant les notations usuelles, et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}; \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$:

$$M \in P \Leftrightarrow \exists t; t' \in \mathbb{R}; \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_a + ta + t'a' \\ y & = & y_a + tb + t'b' \\ z & = & z_a + tc + t'c' \end{array} \right.$$

Proposition 15

La distance de A à P est égale à

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

avec $ax + by + cz + d = 0$ une équation cartésienne de P.

Proposition 16

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans d'équations cartésiennes respectives : $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Alors :

1. si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles ou confondus ;
2. si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite dont une représentation cartésienne est : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$.

Exercice 4

[M3] Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point de coordonnées $(1;\ 1;\ 1)$ et de vecteur orthogonal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

Exercice 5

[M3] Déterminer une équation paramétrique du plan d'équation cartésienne : $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

Plan

1. Repérage dans l'espace
2. Calcul vectoriel dans l'espace
3. Plans de l'espace
4. Droites de l'espace
   - Caractérisations équivalentes d'une droite
   - Représentations cartésiennes
   - Représentations paramétriques
   - Distance d'un point à un droite
   - Les exercices du jour
5. Les sphères

Une droite $\mathcal{D}$ de l'espace est caractérisée :

- soit par la donnée de deux points distincts A et B. On note alors $\mathcal{D} = (AB) = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{AB})$ et (AB) est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0};$$
- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ non nul. Alors $\mathcal{D}$ se note $A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0};$$
- soit par la donnée d'un point A et de deux vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$. Alors : $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que :
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_1} = 0 \\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_2} = 0 \end{array} \right. .$$
- soit par l'intersection de deux plans non parallèles.

Proposition 17

Toute droite admet une représentation, appelée représentation cartésienne, de la forme : $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right.$ avec $(a,b,c);(a',b',c') \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$

REMARQUEs :

1. Une droite admet une infinité de représentations cartésiennes ;
2. Si $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{array}\right.$ est une représentation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$, alors :
   - $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs orthogonaux $\mathcal{D}$;
   - $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Proposition 18

Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$ et passant par le point $A(a;\ b;\ c)$ admet une <u>représentation paramétrique</u> de la forme :

$$\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \\ z = c + t\gamma \end{cases}$$

Proposition 19

La distance de M à D est :

$$d(M, D) = \frac{||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}||}{||\overrightarrow{u}||}$$

avec $D = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$.

Exercice 6

[M3] Déterminer une représentation cartésienne de la droite passant par $A(1;\ 1;\ 1)$ et orthogonale aux vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 7

[M3] Déterminer une représentation paramétrique de la droite de représentation cartésienne : $\begin{cases} x+z+1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$.

Exercice 8

[M3] Soit $\mathcal{P} = A(1,1,1) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_t = O(0,0,0) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}t+1\\t\\t\end{pmatrix}\right)$.

1. Q 1 Quelle est la nature de $\mathcal{P}$? de $\mathcal{D}_t$?
2. Q 2 Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_t \subset \mathcal{P}$.

Exercice 9

[M2-M3] Calculer la distance de l'origine au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x+y+z=1$ puis à la droite (AB), avec $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$.

Plan

1. Repérage dans l'espace
2. Calcul vectoriel dans l'espace
3. Plans de l'espace
4. Droites de l'espace
5. Les sphères
   - Caractérisation
   - Intersection d'un plan et d'une sphère
   - Intersection d'une sphère et d'une droite
   - Les exercices du jour

Définition 9:

On appelle sphère S de centre Ω et de rayon $R > 0$ l'ensemble des points M de $\mathcal{E}$ tels que : $\Omega M = R$.

Proposition 20

1. La sphère S de centre $\Omega(a;\ b;\ c)$ et de rayon R admet une équation, appelée équation cartésienne, de la forme : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$;
2. Réciproquement, si $(a;\ b;\ c) \in \mathbb{R}^3$ et $d > 0$, l'ensemble des points $M(x;\ y;\ z)$ tels que : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d$ est l'équation d'une sphère de centre $\Omega(a;\ b;\ c)$ et de rayon $\sqrt{d}$.

Proposition 21

Soient A, B deux points distincts de l'espace et $\mathcal{S}$ la sphère de diamètre $[AB]$. Alors

$$M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0.$$

Proposition 22

Soient S la sphère de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{P}$ un plan. Alors :

1. si $d(\Omega;\ \mathcal{P}) < R$, l'intersection de S et $\mathcal{P}$ est un cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d(\Omega;\ \mathcal{P})^2}$; De plus le centre de ce cercle est la projection orthogonale de Ω sur le plan.
2. si $d(\Omega;\ \mathcal{P}) = R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ se coupent en un seul point M_0. De plus $\mathcal{P}$ **est dit tangent à la sphère en** M_0 et (ΩM_0) et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires ;
3. si $d(\Omega;\ \mathcal{P}) > R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ ne se coupent pas.

Proposition 23

Soient S une sphère de centre Ω et de rayon R, et $\mathcal{D}$ une droite. Alors :

1. si $d(\Omega;\ \mathcal{D}) < R$, S et $\mathcal{D}$ se coupent en deux points ;
2. si $d(\Omega;\ \mathcal{D}) = R$, S et $\mathcal{D}$ se coupent en un seul point M_0. De plus $\mathcal{D}$ est tangente à la sphère en M_0 et (ΩM_0) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires ;
3. si $d(\Omega;\ \mathcal{D}) > R$, S et $\mathcal{D}$ ne se coupent pas.

Exercice 10

[M4] Montrer que l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que : $x^2 - 4x + y^2 + 6y + z^2 - 2z - 23 = 0$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 11

[M4] Déterminer l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avec la droite (AB), où $A(1;\ 0;\ 1)$ et $B(0;\ 1;\ 0)$.

Exercice 12

[M4] Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 13

[M4] Soit la sphère de centre $O(0,0,0)$ et de rayon 1 puis la droite $\mathcal{D} = A(1,1,1)+\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right)$. Montrer que cette droite est contenue dans deux plans tangents à cette sphère.