Géométrie dans le plan

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

On notera, sauf mentions contraires, dans ce chapitre :

- $\mathcal{P}$ le plan usuel muni d'une orientation.
- $\mathcal{R} = (O;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le repère usuel orienté dans le sens direct (i.e le sens inverse des aiguilles d'une montre).

Plan

⇨ vecteurs et points du plan :

- Soient A un point du plan et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. On note : $B = A + \overrightarrow{AB}$.
- Étant donnés deux points A et B, on appelle distance de A à B le nombre réel, noté AB ou $d(A, B)$, tel que $d(A, B) = ||\overrightarrow{AB}||$.

Proposition (Relation de Chasles)

Quels que soient les points A, B, C du plan, nous avons $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

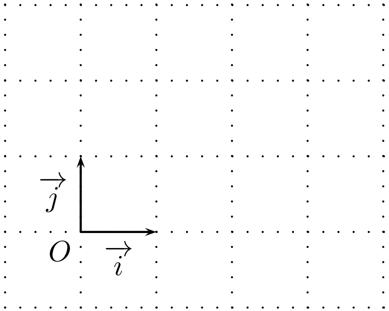
➯ colinéarité de deux vecteurs :

Définition :

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan sont dits colinéaires lorsque : $\exists k \in \mathbb{R}, \overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

⇨ angles orientés de vecteurs :

Pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ l'angle orienté des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.



⇨ angles orientés de vecteurs :

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs. Alors :

1. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})\ [2\pi]$;
2. $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})\ [2\pi]$ (relation de Chasles).

⇨ Bases du plan et repères cartésiens :

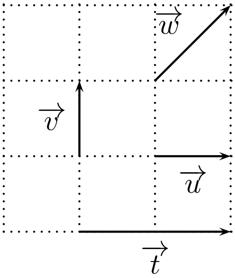
Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

1. On appelle combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tout vecteur $\overrightarrow{w}$ de la forme :
$$\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$$
avec α et β deux nombres réels ;
2. On dit que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base de $\mathcal{P}$ **si tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.**
3. Si les vecteurs $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ sont orthognaux alors on dit que la base est orthogonale. S'ils sont de plus de norme égal à 1, on dit que la base est orthonormale.
4. On appelle *repère cartésien du plan* tout triplet $(\Omega; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ où Ω est un point du plan et $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ est une base.
5. On dit que le repère est direct lorsque la mesure principale de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ appartient à l'intervalle $]0;\ \pi[$. Sinon, on dit qu'il est indirect.

Exemples :

Considérons la figure suivante :



Proposition (caractérisation des bases du plan)

Deux vecteurs du plan forment une base du plan si et seulement s'ils sont non colinéaires.

⇨ Composantes de vecteurs et coordonnées cartésiennes d'un point :

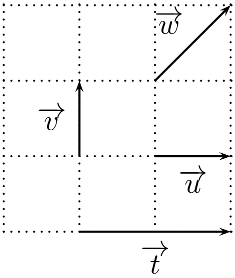
Définition :

Soit $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

- Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur du plan. Alors, *par définition de la base,* il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{w} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$. Le couple $(x; y)$ est appelé les composantes de $\overrightarrow{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.
- Soit M un point du plan. Alors ,les composantes $(x; y)$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont appelées les coordonnées cartésiennes du point M. Et on a $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

Exemples :

Considérons la figure suivante :



⇨ Composantes de vecteurs et coordonnées cartésiennes d'un point :

Proposition

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{t_1}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{t_2}\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$. Alors :
   - $\overrightarrow{t_1} + \overrightarrow{t_2}\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix}$;
   - $\lambda\overrightarrow{t_1}\begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\beta_1 \end{pmatrix}$.
2. Si $\mathcal{R}$ est un repère cartésien quelconque du plan associé à une base $\mathcal{B}$ et $A(x_A;\ y_A)$, $B(x_B;\ y_B)$ dans $\mathcal{R}$. Alors (dans $\mathcal{B}$), $\overrightarrow{AB}\ \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Définition :

Soit $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct. Soit $M(x, y)$ un point de ce plan. Un système de coordonnées polaires de M est un couple $(r; \theta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Dans le plan complexe, l'affixe de M est alors $re^{i\theta}$.

<u>lien polaire/cartésien</u> : si $(x;\ y)$ et $(r;\ \theta)$ représentent respectivement les coordonnées cartésiennes et polaires d'un point M du plan, alors nous avons les relations :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array}\right.}$$

Exercice

Déterminer des coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes $(1;\ 1)$, du point de coordonnées $(1; 2)$.

Plan

Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ le nombre réel tel que : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Si l'un des vecteurs est nul, on pose : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

➩ interprétation géométrique :

soient :

- $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan ;
- A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.
- H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times \overline{AH},$$

où $\overline{AH}$ est la mesure algébrique de AH.

⇨ produit scalaire et orthogonalité :

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors :

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ orthogonaux } \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0.$$

⇨ propriétés vérifiées par le produit scalaire :

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$: le produit scalaire est symétrique ;
2. $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à gauche} \\ \left.\begin{array}{l} (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} \\ (\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \end{array}\right\} \text{linéaire à droite} \end{array}\right\} \text{bilinéaire}$$

➯ expression en base orthonormale :

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

Alors :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = aa' + bb'.$$

Exercice

Dans une base orthonormale, soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $||\overrightarrow{u}||$ et $||\overrightarrow{v}||$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont-ils orthogonaux ?

Définition :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls. On appelle déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et on note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$, le nombre réel tel que : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Si l'un des vecteurs est nul, on pose : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = 0$.

Proposition Produit mixte et colinéarité.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors $[\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}]=0$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

conséquence :

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors : $\mathcal{B}=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est une base du plan si et seulement si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]\neq 0$.

REMARQUE : Plus précisément : $\mathcal{B}=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est une base directe du plan si et seulement si $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]>0$.

⇨ propriétés vérifiées par le déterminant :

Proposition

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -[\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}]$: le déterminant est antisymétrique ;

2. $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] + [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] \\ [\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \end{array}\right\} \text{linéaire à gauche} \\ \left.\begin{array}{l} [\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}] + [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] \\ [\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] \end{array}\right\} \text{linéaire à droite} \end{array}\right\} \text{bilinéaire}$$

⇨ expression en base orthonormale **directe** :

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormale directe et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = ab' - ba'.$$

Notation : en gardant les notations de la proposition, on notera également : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$.

⇨ interprétation géométrique :

Proposition

1. Soit ABC un triangle d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

2. Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire notée $\mathcal{A}$. Alors :

$$\mathcal{A} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\right|.$$

⇨ interprétation géométrique :

Exercice

Dans $\mathcal{R}$, soient $A(3;\ 1)$, $B(0;\ -1)$ et $C(-1;\ 1)$.

1. Montrer que le triangle ABC n'est pas isocèle.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Plan

Une droite $\mathcal{D}$ est déterminée :

- soit par la donnée de deux points distincts A et B. On note $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$:

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right] = 0.$$

- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ non nul. On note alors $D = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ et :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right] = 0.$$

- soit par la donnée d'un point A et d'un vecteur orthogonal $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$. La droite $\mathcal{D}$ est alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0.$$

Proposition

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $M(x;\ y)$ dans $\mathcal{R}$. Alors $M \in \mathcal{D}$ si et seulement s'il existe a, b, c tels que $ax + by + c = 0$ avec a et b non nuls simultanément. Une telle équation est appelée équation cartésienne de $\mathcal{D}$;
2. Réciproquement, l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x;\ y)$ dans $\mathcal{R}$ tels que $ax + by + c = 0$ avec a, b, c réels et a et b non nuls simultanément est une droite.

Exercice

Déterminer une équation cartésienne des droites suivantes :

1. La droite (AB), avec $A(1;\ 0)$ et $B(0;\ 1)$;
2. la droite perpendiculaire à (AB) passant par A ;
3. La droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (3, -2)$ et passant par B.

Proposition

1. Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$, alors :
   - $\overrightarrow{n} = (a, b)$ est un vecteur orthogonal (on dit également $\underline{normal}$) à la droite ;
   - $\overrightarrow{u} = (-b, a)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Proposition

1. Soit la droite $\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u}$ avec $A(x_A; y_A)$ et $\overrightarrow{u} = (a; b)$. Alors

$$M(x; y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \end{array} \right.$$

   On dit qu'on a trouvé un système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.

2. Réciproquement, l'ensemble des points du plan :

$$\{(x_A + ta; y_A + tb); t \in \mathbb{R}\}$$

   est une droite passant par A et de vecteur directeur $(a; b)$.

⇨ représentation paramétrique d'une droite :

REMARQUES :

(1) Une droite admet plusieurs représentations paramétriques : on peut changer de vecteur directeur ou de point A ;

(2) Si $\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \end{cases}$ est une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$, alors :

- $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$;
- $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\mathcal{D}$.

Exercice

Soit l'ensemble :

$$\forall t \in \mathbb{R}; \begin{cases} x = 3 + 6t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

Quel est cet ensemble de points ? Donner ses éléments caractéristiques puis une équation cartésienne.

Proposition

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations cartésiennes respectives : $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$. Alors :

1. si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ou confondues ;
2. si $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un unique point dont les coordonnées $(x;\ y)$ sont solutions du système :
$$\left\{ \begin{array}{l} ax+by=-c \\ a'x+b'y=-c' \end{array} \right. .$$

Définition :

Soient M un point et $\mathcal{D}$ une droite. On appelle distance de M à $\mathcal{D}$, et on note $d(M, \mathcal{D})$ la plus petite distance MN où N décrit $\mathcal{D}$.

$$d(M, \mathcal{D}) = \inf\{AM; A \in \mathcal{D}\}$$

REMARQUE : $d(M, \mathcal{D}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Proposition

Soient $M(x_M;\ y_M)$ un point du plan et $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Alors :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Plan

Définition :

Un cercle $\mathcal{C}$ est donné par son centre Ω et son rayon R : $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / \Omega M = R\}$.

Proposition

L'ensemble des points M tels que $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\}$ est un cercle de diamètre $[AB]$.

Proposition

1. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a;\ b)$ et de rayon R admet une équation, appelée équation cartésienne, de la forme : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$;
2. Réciproquement, si $(a;\ b)\in\mathbb{R}^2$ et $c>0$, l'ensemble des points $M(x;\ y)$ du plan tels que : $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(a;\ b)$ et de rayon $\sqrt{c}$.

REMARQUE :

- Si $c<0$ l'ensemble des points $M(x;\ y)$ tels que : $(x-a)^2+(y-b)^2=c$ est l'ensemble vide.
- Si $c=0$, l'ensemble est réduit à $\Omega(a;\ b)$.

Exercice

Identifier l'ensemble des points du plan d'équation : $x^2-4x+y^2+6y-23=0$, puis déterminer les éléments caractéristiques.

Proposition représentation paramétrique d'un cercle

Un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a;\ b)$ et de rayon R admet une représentation paramétrique de la forme : $\left\{\begin{array}{l} x = a + R\cos(t) \\ y = b + R\sin(t) \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

⇨ intersection d'un cercle et d'une droite :

Proposition

Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R et $\mathcal{D}$ une droite. Alors :

1. si $d(\Omega,\ \mathcal{D}) < R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en deux points ;
2. si $d(\Omega,\ \mathcal{D}) = R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un seul point M_0. De plus $\mathcal{D}$ est tangente au cercle en M_0 et (ΩM_0) et $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires ;
3. si $d(\Omega,\ \mathcal{D}) > R$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ne se coupent pas.

Exercice

1. Identifier la nature de l'intersection du cercle unité $\mathcal{C}$ avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + \frac{1}{2}$;
2. Si l'intersection est un point, déterminer ses coordonnées.