Fonctions usuelles

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir manipuler les expressions mathématiques en présence :

- M1 De la fonction valeur absolue ;
- M2 Des fonctions exponentielles et logarithmes ;
- M3 Des puissances quelconques de réels ;
- M4 Des fonctions hyperboliques.

Plan

Définition 1:

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, le nombre tel que : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$.

REMARQUE : Sur la droite réelle, si l'on note M le point d'abscisse x et A le point d'abscisse a, alors $|x-a|$ mesure la distance de A à M : $|x-a| = AM$.

Proposition 1

$\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $|x| = |-x|$;
2. $|xy| = |x||y|$ et $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$, $(x \neq 0)$;
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Plus généralement : $|x| = m \Leftrightarrow x = m$ ou $x = -m$ si $m \geq 0$.
4. Pour $m \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leq m \Leftrightarrow -m \leq x \leq m$.

REMARQUE : $\forall a \in \mathbb{R},\ \sqrt{a^2} = |a|$.

$|a+b| \neq |a|+|b|$ en toute généralité. Par exemple : $\underbrace{|1-1|}_{=0} \neq \underbrace{|1|+|-1|}_{=2}$.

Proposition 2(Inégalité triangulaire)

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

De plus, $|x + y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y sont de même signe.

⇨ Un premier exemple :

Proposition 3

Soit $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$. Alors
$|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$.

⇨ Un deuxième exemple d'équation avec valeurs absolues :
Dans certaines situations plus délicates, on peut s'aider d'un tableau de signes, ce qui nous permet de faire apparaitre plus facilement tous les différents cas afin d'enlever les valeurs absolues.

Exemple : Résolution de $2|x| + 3|x - 30| = 65$.

Exercice 1

[-M 1 -] Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$$\text{(a) } |x+1| = 3\,; \quad \text{(b) } |x-1| \leq 3\,; \quad \text{(c) } |x+1| > 2.$$

Plan

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition 2:

On appelle logarithme Népérien, et on note $\ln$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$;
- $\ln(1) = 0$.

Proposition 4(propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;

conséquences :

1. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(a^n) = n\ln(a)$.
2. $\ln(a) = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln(\sqrt{a})$, donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

⇨ Tableau de variations et courbe représentative :

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	$\|$	$+$	1	$+$	
$\ln$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

⇨ Équations et inéquations associées :

On retiendra le principe suivant : $\forall (x;\ y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$, de même si l'on remplace l'égalité par des inégalités. Ceci est vrai car $\ln$ est strictement croissante.

⇨ La fonction logarithme décimal :

Définition 3:

On appelle la fonction logarithme décimal, que l'on note $\log$ ou $\log_{10}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donnée par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

REMARQUE : Cette fonction est utilisée en chimie afin de définir le "pH" d'une solution.

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition 4:

1. On appelle nombre d'Euler, noté e, l'unique nombre réel tel que $\ln(e) = 1$;
2. Plus généralement, l'équation de paramètre x : $\ln(u) = x$ admet une unique solution notée e^x (ou encore $\exp(x)$). La fonction, notée $\exp$, qui à tout réel x associe e^x est appelée fonction exponentielle.

Proposition 5(propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres réels. Alors :

1. $e^{a+b} = e^a e^b$;
2. $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;
3. $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

conséquence :

$\forall n \in \mathbb{Z},\ e^{na} = (e^a)^n$.

➩ Tableau de variations et courbe représentative :

Proposition 6

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$		$+$	1	$+$	
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

⇨ Équations et inéquations associées :

- Dans certains cas simples, on pourra passer l'égalité (ou l'inégalité) au logarithme. Pour réaliser ceci, on retient les choses suivantes :
  - Pour tout réel x, $\boxed{\ln(e^x) = x}$ par définition de l'exponentielle ;
  - Pour tout $x > 0$, $\ln(e^{\ln(x)}) = \ln(x) \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = x$. Nous avons donc l'égalité : $\boxed{e^{\ln(x)} = x.}$
- On retiendra également le principe suivant :
  $\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2,\ e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$, de même si l'on remplace l'égalité par des inégalités. Ceci est vrai car $\exp$ est strictement croissante.

Exercice 2

[-M2-] Résoudre l'équation $\ln(x+2) = 2\ln(x)$.

Exercice 3

[-M2-] Résoudre l'équation : $e^{2x+1} = 2e^x$.

Plan

Définition 5:

pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $\boxed{a^b = e^{b\ln(a)}.}$

Définition 6:

Soit α un réel. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction définie par : $f(x) = \exp(\alpha \ln(x))$. On note : $f(x) = x^\alpha$.

Il ne faut pas penser que x^α est égal à $\underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ fois}}$, cette dernière quantité ne voulant rien dire lorsque α n'est pas un entier.

Proposition 7(propriétés algébriques)

Soient α et β deux réels quelconques et x et y deux réels strictement positifs. Alors :

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$;
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$;
4. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$;
5. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
6. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

Proposition 8

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = x^{\alpha}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Les variations selon les valeurs de α sont données par le tableau suivant :

Paramètre	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
Variation	strictement décroissante	constante	strictement croissante

Proposition 9(limites aux bords)

1. Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0^+$;
2. Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = 0^+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$.

Exercice 4

[-M3-] Résoudre l'équation : $2^x + 2^{x+2} = 1$

Plan

Définition 7:

On appelle :

1. fonction cosinus hyperbolique, et on note ch, la fonction définie par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. fonction sinus hyperbolique, et on note sh, la fonction définie par $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Proposition 10

Pour tout réel x :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) & = & e^x \\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) & = & e^{-x} \\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) & = & 1. \end{array}$$

Proposition 11

1.
   1. ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$;
   2. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
2.
   1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$;
   2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$		$+$	1	$+$	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5

[-M4-] Résoudre l'équation : $\mathrm{sh}(x) = 2$.

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$