Fonctions usuelles

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

Plan

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition :

On appelle logarithme Népérien, et on note $\ln$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

- $\ln'(x) =$

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition :

On appelle logarithme Népérien, et on note $\ln$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$;

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition :

On appelle logarithme Népérien, et on note $\ln$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$;
- $\ln(1) = 0$.

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition :

On appelle logarithme Népérien, et on note $\ln$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$;
- $\ln(1) = 0$.

Proposition (propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\ln(ab) =$
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) =$
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition :

On appelle logarithme Népérien, et on note $\ln$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$;
- $\ln(1) = 0$.

Proposition (propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) =$
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition :

On appelle logarithme Népérien, et on note $\ln$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$;
- $\ln(1) = 0$.

Proposition (propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition :

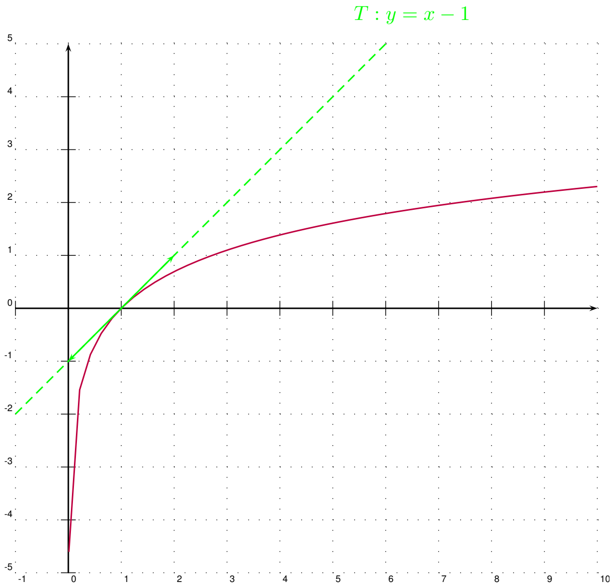
On appelle logarithme Népérien, et on note $\ln$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que :

- $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$;
- $\ln(1) = 0$.

Proposition (propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$;
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$;
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.



$T : y = x - 1$
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

⇨ Équations et inéquations associées :

On retiendra le principe suivant : $\forall (x;\ y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$

⇨ Équations et inéquations associées :

On retiendra le principe suivant : $\forall (x;\ y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$, de même si l'on remplace l'égalité par des inégalités. Ceci est vrai car $\ln$ est strictement croissante.

⇨ Équations et inéquations associées :

On retiendra le principe suivant : $\forall (x;\ y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$, de même si l'on remplace l'égalité par des inégalités. Ceci est vrai car $\ln$ est strictement croissante.

Exercice

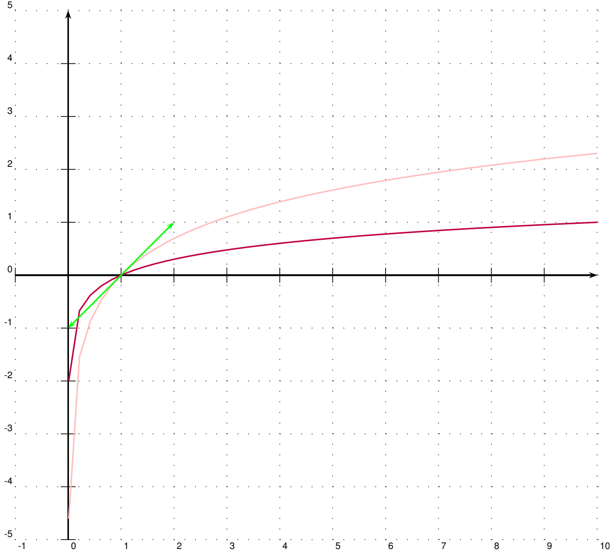
Résoudre l'équation $\ln(x+2) = 2\ln(x)$.

➯ La fonction logarithme décimal :

Définition :

On appelle la fonction logarithme décimal, que l'on note $\log$ ou $\log_{10}$, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donnée par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Représentation graphique



⇨ Définition et premières propriétés :

Définition :

1. On appelle nombre d'Euler, noté e, l'unique nombre réel tel que $\ln(e) = 1$;

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition :

1. On appelle nombre d'Euler, noté e, l'unique nombre réel tel que $\ln(e) = 1$;
2. Plus généralement, l'équation de paramètre x : $\ln(u) = x$ admet une unique solution notée e^x (ou encore $\exp(x)$).

⇨ Définition et premières propriétés :

Définition :

1. On appelle nombre d'Euler, noté e, l'unique nombre réel tel que $\ln(e) = 1$;
2. Plus généralement, l'équation de paramètre x : $\ln(u) = x$ admet une unique solution notée e^x (ou encore $\exp(x)$). La fonction, notée $\exp$, qui à tout réel x associe e^x est appelée fonction exponentielle.

Proposition (propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres réels. Alors :

1. $e^{a+b} =$
2. $e^{-a} =$
3. $e^{a-b} =$

Proposition (propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres réels. Alors :

1. $e^{a+b} = e^a e^b$;
2. $e^{-a} =$
3. $e^{a-b} =$

Proposition (propriétés algébriques)

Soient a et b deux nombres réels. Alors :

1. $e^{a+b} = e^a e^b$;
2. $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;
3. $e^{a-b} =$

Proposition (propriétés algébriques)

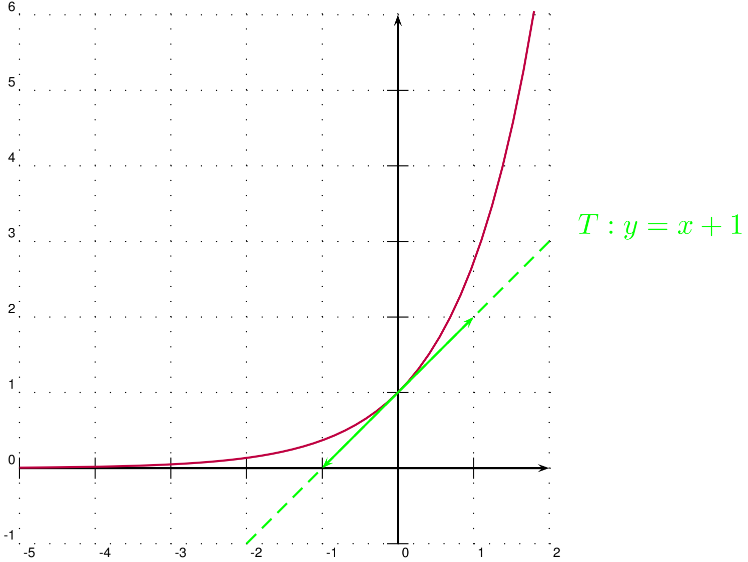
Soient a et b deux nombres réels. Alors :

1. $e^{a+b} = e^a e^b$;
2. $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;
3. $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

➩ Tableau de variations et courbe représentative :

Proposition

La fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$.


6
5
4
3
2
1
0
-1
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
$T : y = x + 1$

➩ Équations et inéquations associées :

- Dans certains cas simples, on pourra passer l'égalité (ou l'inégalité) au logarithme. Pour réaliser ceci, on retient les choses suivantes :

➩ Équations et inéquations associées :

- Dans certains cas simples, on pourra passer l'égalité (ou l'inégalité) au logarithme. Pour réaliser ceci, on retient les choses suivantes :
  - Pour tout réel x, $\boxed{\ln(e^x) = x}$ par définition de l'exponentielle ;

⇨ Équations et inéquations associées :

- Dans certains cas simples, on pourra passer l'égalité (ou l'inégalité) au logarithme. Pour réaliser ceci, on retient les choses suivantes :
  - Pour tout réel x, $\boxed{\ln(e^x) = x}$ par définition de l'exponentielle ;
  - Pour tout $x > 0$, $\ln(e^{\ln(x)}) = \ln(x)$

⇨ Équations et inéquations associées :

- Dans certains cas simples, on pourra passer l'égalité (ou l'inégalité) au logarithme. Pour réaliser ceci, on retient les choses suivantes :
  - Pour tout réel x, $\boxed{\ln(e^x) = x}$ par définition de l'exponentielle ;
  - Pour tout $x > 0$, $\ln(e^{\ln(x)}) = \ln(x) \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = x$.

⇨ Équations et inéquations associées :

- Dans certains cas simples, on pourra passer l'égalité (ou l'inégalité) au logarithme. Pour réaliser ceci, on retient les choses suivantes :
  - Pour tout réel x, $\boxed{\ln(e^x) = x}$ par définition de l'exponentielle ;
  - Pour tout $x > 0$, $\ln(e^{\ln(x)}) = \ln(x) \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = x$. Nous avons donc l'égalité : $\boxed{e^{\ln(x)} = x.}$

⇨ Équations et inéquations associées :

- Dans certains cas simples, on pourra passer l'égalité (ou l'inégalité) au logarithme. Pour réaliser ceci, on retient les choses suivantes :
  - Pour tout réel x, $\boxed{\ln(e^x) = x}$ par définition de l'exponentielle ;
  - Pour tout $x > 0$, $\ln(e^{\ln(x)}) = \ln(x) \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = x$. Nous avons donc l'égalité : $\boxed{e^{\ln(x)} = x.}$
- On retiendra également le principe suivant : $\forall(x;\ y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

⇨ Équations et inéquations associées :

- Dans certains cas simples, on pourra passer l'égalité (ou l'inégalité) au logarithme. Pour réaliser ceci, on retient les choses suivantes :
  - Pour tout réel x, $\boxed{\ln(e^x) = x}$ par définition de l'exponentielle ;
  - Pour tout $x > 0$, $\ln(e^{\ln(x)}) = \ln(x) \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = x$. Nous avons donc l'égalité : $\boxed{e^{\ln(x)} = x.}$
- On retiendra également le principe suivant :
  $\forall (x;\ y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$, de même si l'on remplace l'égalité par des inégalités. Ceci est vrai car $\exp$ est strictement croissante.

⇨ Équations et inéquations associées :

- Dans certains cas simples, on pourra passer l'égalité (ou l'inégalité) au logarithme. Pour réaliser ceci, on retient les choses suivantes :
  - Pour tout réel x, $\boxed{\ln(e^x) = x}$ par définition de l'exponentielle ;
  - Pour tout $x > 0$, $\ln(e^{\ln(x)}) = \ln(x) \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = x$. Nous avons donc l'égalité : $\boxed{e^{\ln(x)} = x.}$
- On retiendra également le principe suivant : $\forall (x;\ y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$, de même si l'on remplace l'égalité par des inégalités. Ceci est vrai car $\exp$ est strictement croissante.

Exercice

Résoudre l'équation : $e^{2x+1} = 2e^x$.

⇨ La notation a^b :

⇨ Fonction puissance :

Définition :

Soit α un réel. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction définie par : $f(x) = \exp(\alpha \ln(x))$. On note : $f(x) = x^\alpha$.

⇨ Fonction puissance :

Définition :

Soit α un réel. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction définie par : $f(x) = \exp(\alpha \ln(x))$. On note : $f(x) = x^\alpha$.

Il ne faut pas penser que x^α est égal à $\underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ fois}}$, cette dernière quantité ne voulant rien dire lorsque α n'est pas un entier.

⇨ Fonction puissance :

Proposition (propriétés algébriques)

Soient α et β deux réels quelconques et x et y deux réels strictement positifs. Alors :

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;

⇨ Fonction puissance :

Proposition (propriétés algébriques)

Soient α et β deux réels quelconques et x et y deux réels strictement positifs. Alors :

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$;

⇨ Fonction puissance :

Proposition (propriétés algébriques)

Soient α et β deux réels quelconques et x et y deux réels strictement positifs. Alors :

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$;
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$;

⇨ Fonction puissance :

Proposition (propriétés algébriques)

Soient α et β deux réels quelconques et x et y deux réels strictement positifs. Alors :

1. $x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}x^{\beta}$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$;
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}$;
4. $\ln\left(x^{\alpha}\right) = \alpha \ln(x)$;

⇨ Fonction puissance :

Proposition (propriétés algébriques)

Soient α et β deux réels quelconques et x et y deux réels strictement positifs. Alors :

1. $x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha}x^{\beta}$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$;
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^{\alpha}}{x^{\beta}}$;
4. $\ln(x^{\alpha}) = \alpha\ln(x)$;
5. $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}$;

⇨ Fonction puissance :

Proposition (propriétés algébriques)

Soient α et β deux réels quelconques et x et y deux réels strictement positifs. Alors :

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$;
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$;
4. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$;
5. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
6. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

⇨ Fonction puissance :

Proposition (propriétés algébriques)

Soient α et β deux réels quelconques et x et y deux réels strictement positifs. Alors :

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$;
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$;
4. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$;
5. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
6. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

Exercice

Résoudre l'équation $2^x + 2^{x+2} = 1$.

Proposition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

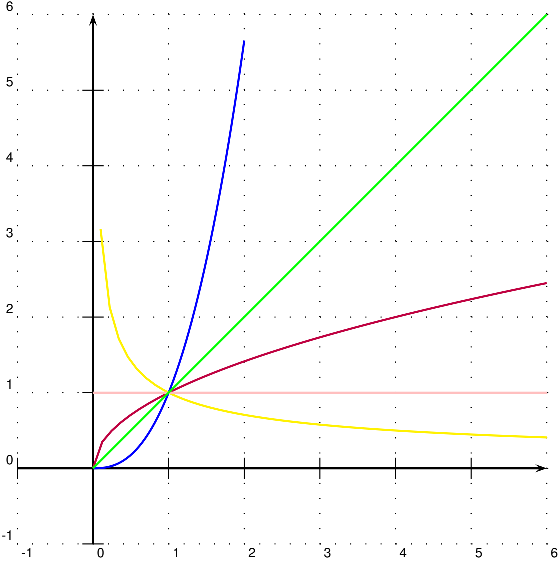
Proposition

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $f(x) = x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Les variations selon les valeurs de α sont données par le tableau suivant :

Paramètre	$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
Variation	strictement décroissante	constante	strictement croissante



6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6

Proposition (limites aux bords)

1. Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0^+$;
2. Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

Plan

Définition :

On appelle :

1. fonction cosinus hyperbolique, et on note ch, la fonction définie par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Définition :

On appelle :

1. fonction cosinus hyperbolique, et on note ch, la fonction définie par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. fonction sinus hyperbolique, et on note sh, la fonction définie par $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Proposition

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) & = & e^x; \\ \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) & = & e^{-x}; \\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) & = & 1. \end{array}$$

Proposition

1.

(a) ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$;

Proposition

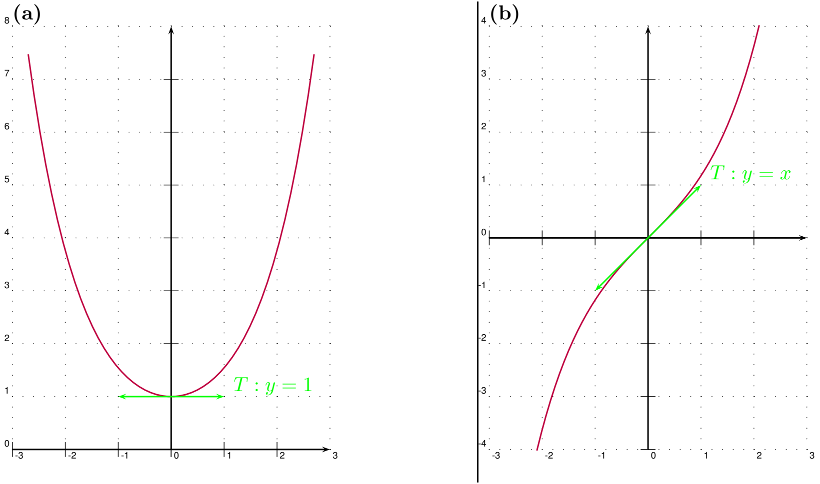
1.
   (a) ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$;
   (b) sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

Proposition

1.
   (a) ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$;
   (b) sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
2.
   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$;

Proposition

1.
   (a) ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$;
   (b) sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$.
2.
   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$;
   (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$.



(a) Courbe représentative de ch. (b) Courbe représentative de sh.

Plan

On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

- À tout réel x correspond un unique point M sur le cercle trigonométrique ;

On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

- À tout réel x correspond un unique point M sur le cercle trigonométrique ;
- À tout point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels

On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

- À tout réel x correspond un unique point M sur le cercle trigonométrique ;
- À tout point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels, mais un unique réel $\theta_0 \in]-\pi;\ \pi]$, appelé mesure principale.

On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

- À tout réel x correspond un unique point M sur le cercle trigonométrique ;
- À tout point M du cercle trigonométrique correspond une infinité de réels, mais un unique réel $\theta_0 \in]-\pi;\ \pi]$, appelé mesure principale. Tous les autres réels θ associés au même point sont de la forme $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice

Déterminer la mesure principale de $\frac{77\pi}{3}$.

⇨ cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel :

Définition :

Soient x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé au réel x. On appelle :

- cosinus de x, et on note $\cos(x)$, l'abscisse de M.

⇨ cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel :

Définition :

Soient x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé au réel x. On appelle :

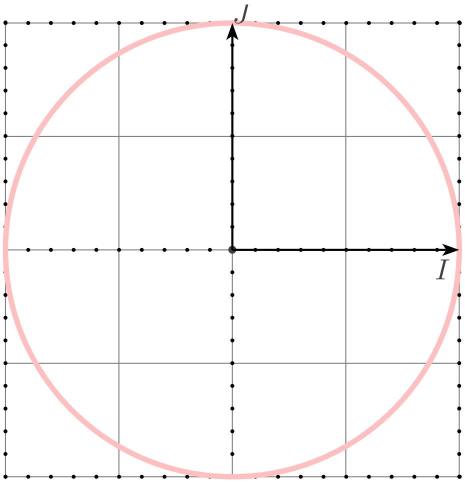
- cosinus de x, et on note $\cos(x)$, l'abscisse de M.
- sinus de x, et on note $\sin(x)$, l'ordonnée de M.

➪ cosinus, sinus et tangente d'un nombre réel :

Définition :

Soient x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé au réel x. On appelle :

- cosinus de x, et on note $\cos(x)$, l'abscisse de M.
- sinus de x, et on note $\sin(x)$, l'ordonnée de M.
- $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, lorsque cette expression a un sens.



J
I

⇨ relations fondamentales :

Proposition

1. Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

⇨ relations fondamentales :

Proposition

1. Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

⇨ relations fondamentales :

Proposition

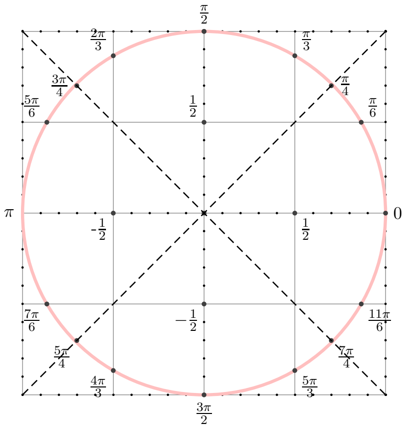
1. Pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Exercice

Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

⇨ valeurs remarquables :

réel x	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	non défini



⇨ valeurs remarquables :

Exercice

Calculer $\sin\left(\frac{91\pi}{6}\right)$.

⇨ définitions et premières propriétés :

Définition :

1. On appelle fonction cosinus, et on note $\cos$, la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
2. On appelle fonction sinus, et on note $\sin$, la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

⇨ définitions et premières propriétés :

Définition :

1. On appelle fonction cosinus, et on note $\cos$, la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
2. On appelle fonction sinus, et on note $\sin$, la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

Proposition (propriétés algébriques)

Pour tout réel x, nous avons les relations :

1. $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
2. Pour tout entier relatif k, $\cos(x + 2k\pi) =$ et $\sin(x + 2k\pi) =$

⇨ définitions et premières propriétés :

Définition :

1. On appelle fonction cosinus, et on note $\cos$, la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
2. On appelle fonction sinus, et on note $\sin$, la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

Proposition (propriétés algébriques)

Pour tout réel x, nous avons les relations :

1. $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
2. Pour tout entier relatif k, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ (2π périodicité) ;

⇨ définitions et premières propriétés :

Définition :

1. On appelle fonction cosinus, et on note $\cos$, la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
2. On appelle fonction sinus, et on note $\sin$, la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

Proposition (propriétés algébriques)

Pour tout réel x, nous avons les relations :

1. $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
2. Pour tout entier relatif k, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ (2π périodicité) ;
3. $\cos(-x) = \cos(x), \cos(\pi - x) = -\cos(x), \cos(\pi + x) = -\cos(x)$;

⇨ définitions et premières propriétés :

Définition :

1. On appelle fonction cosinus, et on note $\cos$, la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
2. On appelle fonction sinus, et on note $\sin$, la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

Proposition (propriétés algébriques)

Pour tout réel x, nous avons les relations :

1. $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
2. Pour tout entier relatif k, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ (2π périodicité) ;
3. $\cos(-x) = \cos(x), \cos(\pi - x) = -\cos(x), \cos(\pi + x) = -\cos(x)$;
4. $\sin(-x) = -\sin(x), \sin(\pi - x) = \sin(x), \sin(\pi + x) = -\sin(x)$;

⇨ définitions et premières propriétés :

Définition :

1. On appelle fonction cosinus, et on note $\cos$, la fonction qui à tout réel x associe $\cos(x)$.
2. On appelle fonction sinus, et on note $\sin$, la fonction qui à tout réel x associe $\sin(x)$.

Proposition (propriétés algébriques)

Pour tout réel x, nous avons les relations :

1. $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$;
2. Pour tout entier relatif k, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ (2π périodicité) ;
3. $\cos(-x) = \cos(x), \cos(\pi - x) = -\cos(x), \cos(\pi + x) = -\cos(x)$;
4. $\sin(-x) = -\sin(x), \sin(\pi - x) = \sin(x), \sin(\pi + x) = -\sin(x)$;
5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x),\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

⇨ dérivées et tableaux de variations :

Proposition

1. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$;
2. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$.

⇨ dérivées et tableaux de variations :

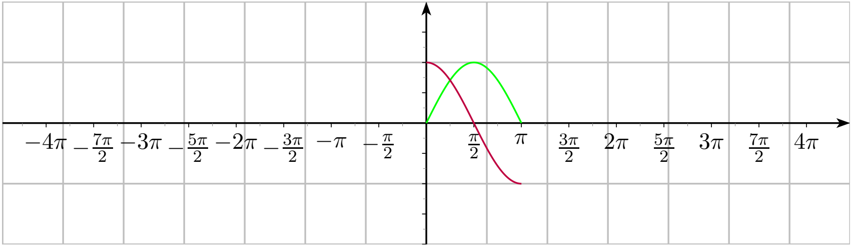
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin(x)$		$-$	
$\cos$	1 ↘	0 ↘	-1

Tableau de variations de la fonction $\cos$ sur $[0;\ \pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	$+$	0	$-$
$\sin$	0 ↗	1 ↘	0

Tableau de variations de la fonction $\sin$ sur $[0;\ \pi]$

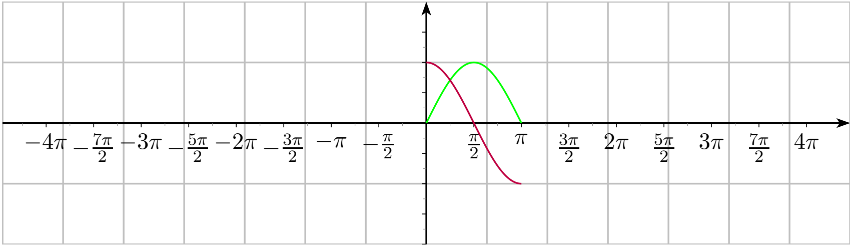
⇨ courbes représentatives :



⇨ courbes représentatives :

- ⇨ Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$.
- ⇨ • La fonction $\cos$ est 2π périodique. On peut donc restreindre son étude sur un intervalle de longueur 2π : $[-\pi;\ \pi]$.
  • $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est donc paire.

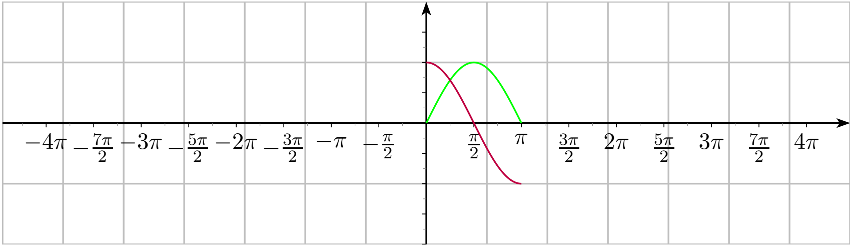
  Il suffit donc d'étudier la fonction $\cos$ sur $[0;\ \pi]$.



⇨ courbes représentatives :

- Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$.
- • La fonction $\cos$ est 2π périodique. On peut donc restreindre son étude sur un intervalle de longueur 2π : $[-\pi;\ \pi]$.
  • $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est donc paire.

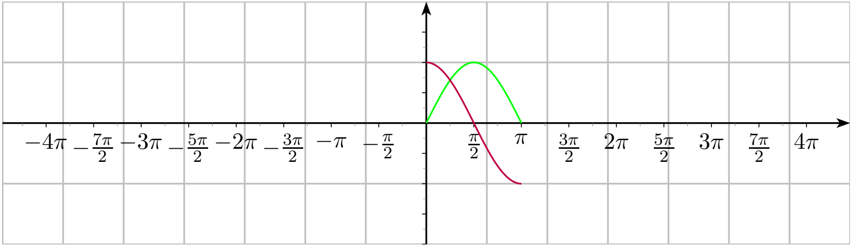
  Il suffit donc d'étudier la fonction $\cos$ sur $[0;\ \pi]$. On complètera le tracé de la courbe représentative par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis par 2π périodicité.



⇨ courbes représentatives :

- ⇨ Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$.
- ⇨ • La fonction $\cos$ est 2π périodique. On peut donc restreindre son étude sur un intervalle de longueur 2π : $[-\pi;\ \pi]$.
  • $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est donc paire.

  Il suffit donc d'étudier la fonction $\cos$ sur $[0;\ \pi]$. On complètera le tracé de la courbe représentative par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis par 2π périodicité.
- ⇨ De la même façon ($\sin$ est impaire et 2π périodique), on complètera le tracé de la courbe représentative par symétrie par rapport à l'origine puis par 2π périodicité.



1. Fonctions logarithme, exponentielle et puissance
   - Fonction logarithme
   - Tableau de variations et courbe représentative
   - Fonction exponentielle
   - Fonction puissance
2. Fonctions hyperboliques
   - Définition et premières propriétés
   - Dérivées et limites aux bords du domaine de définition
   - Tableaux de variations et courbes représentatives
3. Fonctions trigonométriques usuelles
   - Rappels de trigonométrie
   - Les fonctions cosinus et sinus
   - La fonction tangente
   - Équations et inéquations trigonométriques

⇨ définition et premières propriétés :

Définition :

On appelle fonction tangente, et on note $\tan$, la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

⇨ définition et premières propriétés :

Définition :

On appelle fonction tangente, et on note $\tan$, la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, nous avons :

1. $\tan(-x) = -\tan(x)$ (imparité) ;
2. $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ (π-périodicité) ;
3. $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$;
4. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan(x)}$.

⇨ dérivée et sens de variation :

Proposition

La fonction tangente est dérivable sur $D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, et :

$$\forall x \in D, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

⇨ limites et tableau de variations :

Proposition (limites)

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$;

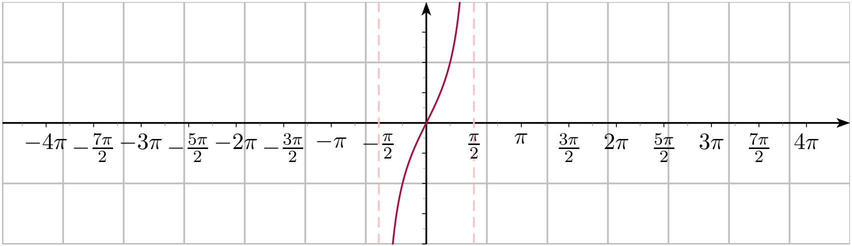
⇨ limites et tableau de variations :

Proposition (limites)

(a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$;

(b) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.

⇨ courbe représentative :



Représentation graphique de la fonction tan.

Les fonctions cosinus, sinus et tangentes n'étant pas strictement monotones, nous n'avons pas en toutes généralités les équivalences $\cos(x) = \cos(y) \Leftrightarrow x = y$ etc...

⇨ équations fondamentales :

Proposition

1. $\cos(U) = \cos(V) \Leftrightarrow U = V$
2. $\sin(U) = \sin(V) \Leftrightarrow U = V$
3. $\tan(U) = \tan(V) \Leftrightarrow U = V$

➩ équations fondamentales :

Proposition

1. $\cos(U) = \cos(V) \Leftrightarrow U = V \ [2\pi]$ ou $U = -V \ [2\pi]$;
2. $\sin(U) = \sin(V) \Leftrightarrow U = V$
3. $\tan(U) = \tan(V) \Leftrightarrow U = V$

⇨ équations fondamentales :

Proposition

1. $\cos(U) = \cos(V) \Leftrightarrow U = V\ [2\pi]$ ou $U = -V\ [2\pi]$;
2. $\sin(U) = \sin(V) \Leftrightarrow U = V\ [2\pi]$ ou $U = \pi - V\ [2\pi]$;
3. $\tan(U) = \tan(V) \Leftrightarrow U = V$

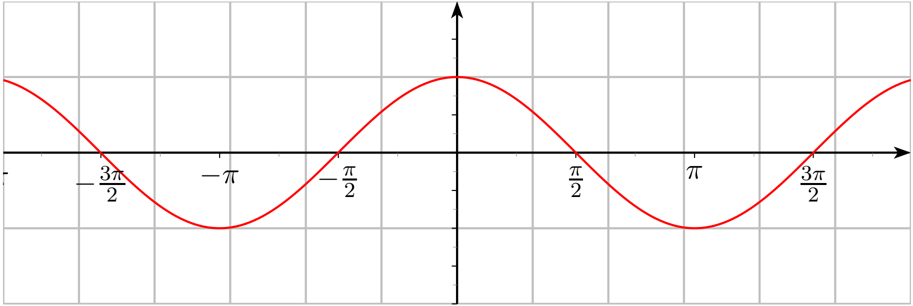
⇨ équations fondamentales :

Proposition

1. $\cos(U) = \cos(V) \Leftrightarrow U = V\ [2\pi]$ ou $U = -V\ [2\pi]$;
2. $\sin(U) = \sin(V) \Leftrightarrow U = V\ [2\pi]$ ou $U = \pi - V\ [2\pi]$;
3. $\tan(U) = \tan(V) \Leftrightarrow U = V\ [\pi]$.

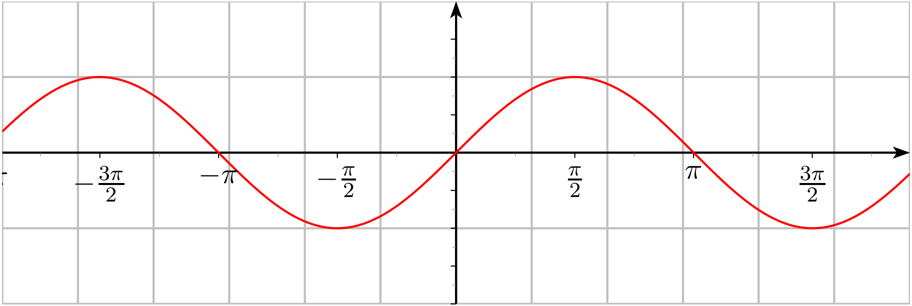
Illustrations graphiques

1.



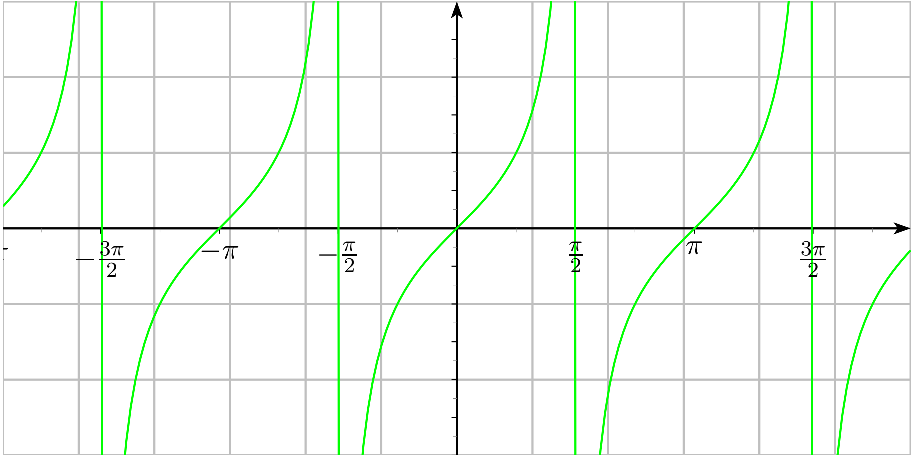
Illustrations graphiques

2.



Illustrations graphiques

3.



Exercice

Résoudre les équations suivantes :

$$\text{(a) } \cos(x) = \frac{1}{2}\,; \quad \text{(b) } \cos(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

⇨ inéquations fondamentales :

Exercice

Résoudre l'inéquation : $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$.

⇨ formulaire de trigonométrie :

⇨ formulaire de trigonométrie :

Relations fondamentales :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

⇨ formulaire de trigonométrie :

Formules d'addition :

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$	$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

⇨ formulaire de trigonométrie :

Formules de duplication :

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\
&= 2\cos^2(a) - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2(a) \\
\sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) \\
\tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}
\end{aligned}$$

⇨ formulaire de trigonométrie :

Formules de linéarisation :

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\cos(a)\cos(b) = \tfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\cos(a)\sin(b) = \tfrac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$$

$$\sin(a)\sin(b) = -\tfrac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

⇨ formulaire de trigonométrie :

Transformations de sommes en produits :

$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$