Études de fonctions

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Maîtriser les points fondamentaux du vocabulaire des applications (image directe, réciproque, composition) ;
- M2 Déterminer le domaine d'étude d'une fonction ;
- M3 Maîtriser le calcul de dérivées ;
- M4 Maîtriser le calcul de limites élémentaires ;
- M5 Déterminer des asymptotes à la courbe représentative d'une fonction ;
- M6 Savoir faire l'étude d'une fonction de façon autonome ;
- M7 Utiliser les études de fonctions afin de résoudre des problèmes d'optimisation.

Plan

- Une application f de E vers F (on note $f : E \to F$) est un procédé qui a tout élément x associe un **unique** élément y de F. On note alors $y = f(x)$ et :
  - y est appelé **l'image** de x par f ;
  - x est **un antécédent** de y ;
  - E est l'ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée.
- On note $\mathcal{F}(E, F)$ (ou F^E) l'ensemble des applications de E vers F.
- Si $f : E \to F$ est une application, le graphe de f, noté Γ_f est le sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$:

$$\Gamma_f = \{(x;\ y) \in E \times F \ / \ y = f(x)\} \subset E \times F.$$

- Soit E un ensemble. On appelle **identité de** E l'application notée id_E telle que : $id_E \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$.
- Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle **application caractéristique de** A l'application notée $\mathbb{1}_A$ telle que :

$$\mathbb{1}_A \ : \ \begin{array}{ccc} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & 1,\ \text{si } x \in A \\ x & \mapsto & 0,\ \text{sinon.} \end{array}$$

Définition 1:

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On appelle composée de g et f et on note $g \circ f$ l'application

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

Proposition 1

La loi de composition des fonctions vérifie les deux propriétés suivantes. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$.

- Associativité : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- Elément neutre : $id_F \circ f = f \circ id_E = f$

Définition 2:

Soient E, F deux ensembles et $f\ :\ E \to F$. Soient $A \subset E$, $B \subset F$.

- On appelle **image directe** de A par f, notée $f(A)$, l'ensemble

$$f(A) = \{f(x),\, x \in A\}.$$

- On appelle **image réciproque** de B, notée $f^{-1}(B)$ l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}.$$

Définition 3:

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Soit $A \subset E$, la restriction de f à A est l'application notée $f|_A$ de A dans F telle que :
   $\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$.
2. Soit $E \subset B$. Toute application g de B dans F telle que :
   $\forall x \in E,\ g(x) = f(x)$ est un prolongement de f à B.

Exercice 1

[-M1-]Soit $P : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$ et $I : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n/2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ (n-1)/2 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$. Calculer $I \circ P$ et $P \circ I$.

Exercice 2

[-M1-]

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + x - 2 \end{array}.$$

Soit $A = [-3; -1]$, $B = [0; \frac{3}{2}]$. Déterminer $f(A)$, $f(B)$, $f(A) \cap f(B)$, $f(A) \cup f(B)$.
Soit $C = [-2; 0]$, $D = [-4; -2]$. Déterminer $f^{-1}(C)$, $f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, $f^{-1}(C \cap D)$ et $f^{-1}(C \cup D)$.

Plan

⇨ Domaine de définition et lien avec les applications :

La différence entre la notion de fonction et la notion d'application est infime. Si f est une fonction de la variable x, alors $f(x)$ n'existe pas forcément tandis que pour une application $f(x)$ a forcément un sens.

On commence systématiquement l'étude d'une fonction f par la détermination des valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ a un sens, c'est à dire par la recherche du domaine de définition (souvent noté $\mathcal{D}_f$.)

⇨ Opérations usuelles supplémentaires :

En plus de la relation de composition que l'on peut définir sans ambiguité pour les fonctions réelles à valeurs réelles, nous pouvons ajouter les deux opérations suivantes :

Définition 4:

Étant données deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on appelle :

1. Somme de f et g la fonction, notée $f+g$, telle que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. Produit de f et g la fonction, notée fg, telle que $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$;

➩ Courbes réprésentatives de fonctions :

On appelle courbe représentative d'une fonction le graphe de l'application : $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$. (Voir ci-dessus)

Proposition 2

Soit a un réel. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$. Alors

fonction	La représentation graphique est l' image de $\mathcal{C}_f$ par :
$x \mapsto f(x) + a$	une translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$
$x \mapsto f(x + a)$	une translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$

⇨ fonctions périodiques :

Définition 5:

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est T-périodique (ou périodique de période T) sur D lorsque :

(i) $\forall x \in D, x + T \in D$;
(ii) $\forall x \in D, f(x+T) = f(x)$.

Proposition 3

Si f est T-périodique sur D, alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$.

⇨ fonctions paires et impaires :

Définition 6:

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que f est :

1. paire lorsque : $\begin{array}{l} \text{(i) } \forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D} \\ \text{(ii) } \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x) \end{array}$;
2. impaire lorsque : $\begin{array}{l} \text{(i) } \forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D} \\ \text{(ii) } \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x) \end{array}$.

Proposition 4

1. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
2. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition 7:

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est :

1. strictement croissante sur D si :
$\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
2. strictement décroissante sur D si :
$\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
3. croissante sur D si : $\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
4. décroissante sur D si : $\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
5. strictement monotone sur D si f est strictement décroissante ou strictement croissante sur D ;
6. monotone sur D si f est croissante sur D ou décroissante sur D.

Proposition 5

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement monotone alors : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Définition 8:

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que

1. f est minorée par m lorsque $\forall x \in D, f(x) \geq m$
2. f est majorée par M lorsque $\forall x \in D, f(x) \leq M$
3. f est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée.

Proposition 6

f est une fonction bornée sur un ensemble D si et seulement si $|f|$ est majorée sur D.

Plan

- On appelle taux d'accroissement de f en x_0, et on note $\tau_{x_0}(t)$, l'expression : $\tau_{x_0}(t) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$;
- Cette valeur correspond au coefficient directeur de la droite D_t passant par les points $M_{x_0}(x_0;\ f(x_0))$ et $M_t(t;\ f(t))$ appartenant à la courbe représentative de f ;
- Si, lorsque t tend vers x_0 le taux d'accroissement tend vers une limite finie, alors la droite D_t tend vers une droite non verticale que l'on appelle la tangente à la courbe représentative de f en x_0.

Définition 9:

Soit f une fonction réelle. On dit que f est dérivable en $x_0 \in D$ lorsque $\tau_{x_0}(t)$ admet une limite finie quand t tend vers x_0. On note alors : $f'(x_0) = \lim\limits_{t \to x_0} \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ et on appelle ce réel le nombre dérivé de f en x_0.

conséquence :

Si f est dérivable en x_0, alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente non verticale en ce point d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Définition 10:

Soit f une fonction réelle. On dit que f est dérivable sur D lorsque f est dérivable en tout point $x_0 \in D$.

On définit ainsi une fonction qui à tout réel $x_0 \in D$ associe le nombre dérivé $f'(x_0)$. On appelle cette fonction la fonction dérivée de f et on note cette dernière f'.

Proposition 7

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

1. - f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$;
   - f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$;
   - $f' = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.
2. - Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I ;
   - Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.
3. - Si $f' \geq 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante sur I ;
   - Si $f' \leq 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est

Le résultat n'est valable que si I est un intervalle. Par exemple, la fonction inverse a une dérivée égale à $-\frac{1}{x}$, donc toujours strictement négative. Pourtant la fonction inverse n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Proposition 8

Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est dérivable sur D et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$;
2. fg est dérivable sur D et : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. Si g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D et :
   $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$
4. Si φ est dérivable sur D' et telle que $\varphi(D') \subset D$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur D'. De plus : $(f \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x) \times f'(\varphi(x))$.
5. Les fonctions polynômiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

[-M2-] Après avoir donné l'ensemble de définition, étudier la parité et/ou la périodicité de la fonction f puis indiquer l'intervalle sur lequel il suffit d'étudier les fonctions.

(a) $f(x) = \sin^2(x)\cos(2x)$; (b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$;

Exercice 4

[-M3-] Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur un ensemble D que l'on précisera et calculer leurs dérivées sur D.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^5}$; (b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$;

(c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{e^x-2}{e^x+1}}$; (d) $i(x) = \dfrac{x}{x^2+1}\ln(x)e^x$.

Plan

Notations : Sauf mentions contraires :

- Les fonctions f et g sont définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$;
- I est un intervalle (non vide) inclus dans D ;
- x_0 est un point de I ou une borne finie de I (exemple : $I =]0;\ +\infty[$ et $x_0 = 0$) ;
- les lettres a et b représentent x_0, $+\infty$ ou $-\infty$.

Ci-dessous, FI sont les initiales de « forme indéterminée ». Il n'y a pas de règle générale pour conclure directement dans ces situations.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

⇨ Multiplication par un réel non nul :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} \lambda f(x)$	λL	$\lambda > 0 : +\infty$ $\lambda < 0 : -\infty$	$\lambda > 0 : -\infty$ $\lambda < 0 : +\infty$

➩ Produit :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$	LL'	∞	FI	∞

⇨ Quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$L \neq 0$	0	L	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$L > 0 : +\infty$ $L < 0 : -\infty$	$L > 0 : -\infty$ $L < 0 : +\infty$	FI	FI	0	FI

➩ composition :

Proposition 9

Soient f définie sur D et g définie sur D' telles que $g \circ f$ ait un sens. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} g \circ f(x) = L$$

➩ Expressions rationnelles :

Limites en $\pm\infty$

Méthode : On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme de plus haut degré.

Limites en $x_0 \in \mathbb{R}$

Méthode : Si, dans le cas d'une expression rationnelle, nous avons une forme indéterminée en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors il est possible de factoriser le numérateur et le dénominateur par $x - x_0$.

⇨ Expressions avec radicaux :

Méthode : pour lever des formes indéterminées, on peut utiliser l'expression conjuguée. On rappelle que l'expression conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et réciproquement.

⇨ Utilisation du taux d'acroissement et du nombre dérivé en un point :

RAPPEL : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Proposition 10

(a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$; (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$; (c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$;

(d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

⇨ Croissances comparées :

Proposition 11

Soient α et β deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} |\ln(x)|^{\beta} = 0$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{(e^{x})^{\beta}} = 0$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^{\alpha} (e^{x})^{\beta} = 0.$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère usuel $\mathcal{R}$.

➩ Asymptotes verticales :

Définition 11:

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $x = x_0$ comme asymptote verticale lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

⇨ Asymptotes obliques :

Définition 12:

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $y = ax + b$ comme asymptote oblique lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Exercice 5

[-M4-] Calculer les limites suivantes aux points proposés :
(a) $\dfrac{x^3+x^2+x-14}{x^2-4}$ en 2 ; (b) $\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$ en 0 ; (c) $\dfrac{\ln(x)}{x-1}$ en 1.

Exercice 6

[-M5-] Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-x}{x-5}-2x\right)$. En déduire que la fonction f d'expression $f(x)=\dfrac{2x^2-x}{x-5}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on donnera une équation réduite.

Plan

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

1. Déterminer le domaine de définition D.
2. Étudier la périodicité de f : si f est T-périodique, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$. On obtiendra alors la courbe représentative de f en translatant le morceau de courbe obtenu sur $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$.
3. Déterminer si f est paire ou impaire. Si tel est le cas, il suffit d'étudier la fonction sur $[0;\ +\infty[\cap D$, puis de compléter par symétrie (par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine du repère).
4. Étudier les variations de f en calculant f' et en étudiant le signe de cette expression.
5. Calculer les limites aux bords du domaine d'étude pour dresser le tableau de variations de f.
6. Déterminer les éventuelles asymptotes et les tangentes aux points figurant sur le tableau de variations.
7. Tracer la courbe représentative de f avec les éventuelles asymptotes ou tangentes aux points remarquables.

Proposition 12(Inégalité fondamentale du logarithme)

Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

conséquence :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x}$.

Proposition 13

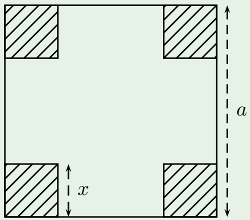
$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$

Exercice 7

[-M6-] Faire l'étude complète des deux fonctions suivantes : $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \sqrt{3}\cos(x)$, $g(x) = x^x$.

Exercice 8

[-M7-]



Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on dispose d'une feuille carrée (en carton) dont le côté est de longueur a $(a \neq, 0)$. À chacun des quatre angles, on découpe un carré de longueur x et on rabat les quatre angles perpendiculairement. On cherche x pour obtenir une boîte de volume maximal.

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$