Études de fonctions réelles

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

Plan

⇨ Domaine de définition :

Définition :

Une fonction réelle de la variable réelle, notée f, est la donnée d'un **sous ensemble** de $\mathbb{R}$, appelé ensemble de définition et noté $\mathcal{D}_f$,

⇨ Domaine de définition :

Définition :

Une fonction réelle de la variable réelle, notée f, est la donnée d'un **sous ensemble** de $\mathbb{R}$, appelé ensemble de définition et noté $\mathcal{D}_f$, et **d'un procédé** qui, à chaque élément x de $\mathcal{D}_f$ associe un unique nombre réel noté $f(x)$.

⇨ Domaine de définition :

Définition :

Une fonction réelle de la variable réelle, notée f, est la donnée d'un **sous ensemble** de $\mathbb{R}$, appelé ensemble de définition et noté $\mathcal{D}_f$, et **d'un procédé** qui, à chaque élément x de $\mathcal{D}_f$ associe un unique nombre réel noté $f(x)$. On note :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

⇨ Domaine de définition :

Définition :

Une fonction réelle de la variable réelle, notée f, est la donnée d'un **sous ensemble** de $\mathbb{R}$, appelé ensemble de définition et noté $\mathcal{D}_f$, et **d'un procédé** qui, à chaque élément x de $\mathcal{D}_f$ associe un unique nombre réel noté $f(x)$. On note :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

Parfois, une fonction est définie uniquement par la donnée de l'expression $f(x)$, sans que l'ensemble $\mathcal{D}_f$ ne soit précisé. Dans ce cas, il s'agit de le déterminer, c'est à dire de trouver le « plus grand ensemble »de $\mathbb{R}$ tel que l'expression $f(x)$ ait un sens.

⇨ opérations usuelles :

Définition :

Étant données deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on appelle :

1. Somme de f et g la fonction, notée $f+g$, telle que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;

➩ opérations usuelles :

Définition :

Étant données deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on appelle :

1. Somme de f et g la fonction, notée $f+g$, telle que $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$;
2. Produit de f et g la fonction, notée fg, telle que $(fg)(x)=f(x)\times g(x)$;

⇨ opérations usuelles :

Définition :

Étant données deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on appelle :

1. Somme de f et g la fonction, notée $f+g$, telle que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. Produit de f et g la fonction, notée fg, telle que $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$;
3. Composée de g par f la fonction, notée $f \circ g$, telle que $(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$.

Exemples :

(1) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $(f - 3g)(x) =$

(2) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $(fg)(x) =$

(3) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $(f \circ g)(x) =$
$(g \circ f)(x) =$

(4) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = -x^2$, $(g \circ f)(x) =$
$(f \circ g)(x) =$

Exemples :

(1) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $(f - 3g)(x) = x - 3x^2$;

(2) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $(fg)(x) =$

(3) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $\begin{array}{l}(f \circ g)(x) = \\ (g \circ f)(x) =\end{array}$

(4) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = -x^2$, $\begin{array}{l}(g \circ f)(x) = \\ (f \circ g)(x) =\end{array}$

Exemples :

(1) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $(f - 3g)(x) = x - 3x^2$;

(2) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $(fg)(x) = x^3 + x^2$;

(3) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $\quad (f \circ g)(x) =$
$\quad (g \circ f)(x) =$

(4) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = -x^2$, $\quad (g \circ f)(x) =$
$\quad (f \circ g)(x) =$

Exemples :

(1) $f(x) = x,\ g(x) = x^2,\ (f - 3g)(x) = x - 3x^2;$

(2) $f(x) = x + 1,\ g(x) = x^2,\ (fg)(x) = x^3 + x^2;$

(3) $f(x) = x + 1,\ g(x) = x^2,$
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \\ (g \circ f)(x) &= \end{aligned}$$

(4) $f(x) = \ln(x),\ g(x) = -x^2,$
$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= -\ln(x)^2; \\ (f \circ g)(x) &= \ln(-x^2). \end{aligned}$$

Définition :

La représentation graphique, ou la courbe représentative, d'une fonction f dans le repère usuel est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$.

Définition :

La représentation graphique, ou la courbe représentative, d'une fonction f dans le repère usuel est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$.

Proposition

Soit a un réel. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$. Alors

fonction	La représentation graphique est l' image de $\mathcal{C}_f$ par :
$x \mapsto f(x) + a$	
$x \mapsto f(x + a)$	
$x \mapsto f(a - x)$	

Définition :

La représentation graphique, ou la courbe représentative, d'une fonction f dans le repère usuel est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$.

Proposition

Soit a un réel. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$. Alors

fonction	La représentation graphique est l' image de $\mathcal{C}_f$ par :
$x \mapsto f(x) + a$	translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$
$x \mapsto f(x+a)$	
$x \mapsto f(a-x)$	

Définition :

La représentation graphique, ou la courbe représentative, d'une fonction f dans le repère usuel est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$.

Proposition

Soit a un réel. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$. Alors

fonction	La représentation graphique est l' image de $\mathcal{C}_f$ par :
$x \mapsto f(x) + a$	translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$
$x \mapsto f(x + a)$	translation de vecteur $\boxed{-a\overrightarrow{i}}$
$x \mapsto f(a - x)$	

Définition :

La représentation graphique, ou la courbe représentative, d'une fonction f dans le repère usuel est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}_f$.

Proposition

Soit a un réel. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$. Alors

fonction	La représentation graphique est l' image de $\mathcal{C}_f$ par :
$x \mapsto f(x) + a$	translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$
$x \mapsto f(x + a)$	translation de vecteur $\boxed{-a\overrightarrow{i}}$
$x \mapsto f(a - x)$	symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$

⇨ fonctions périodiques :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est T-périodique (ou périodique de période T) sur D lorsque :

(i) $\forall x \in D, x + T \in D$;

(ii) $\forall x \in D, f(x + T) = f(x)$.

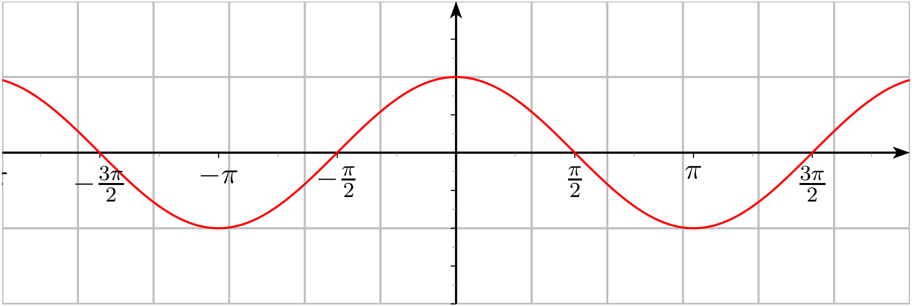
⇨ fonctions périodiques :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est T-périodique (ou périodique de période T) sur D lorsque :

(i) $\forall x \in D, x + T \in D$;

(ii) $\forall x \in D, f(x+T) = f(x)$.

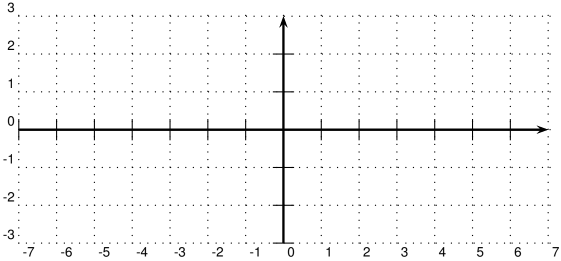


Proposition

Si f est T-périodique sur D, alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition

Si f est T-périodique sur D, alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$.



⇨ fonctions paires et impaires :

Définition :

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que f est :

1. paire lorsque : $\begin{array}{l} \text{(i) } \forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D} \\ \text{(ii) } \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x) \end{array}$;

⇨ fonctions paires et impaires :

Définition :

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que f est :

1. paire lorsque : (i) $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$;
   (ii) $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$
2. impaire lorsque : (i) $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$.
   (ii) $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$

⇨ fonctions paires et impaires :

Définition :

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que f est :

1. paire lorsque : (i) $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$;
   (ii) $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$
2. impaire lorsque : (i) $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$.
   (ii) $\forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$

Proposition

1. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
2. La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est :

1. strictement croissante sur D lorsque :
   $\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est :

1. strictement croissante sur D lorsque :
   $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
2. strictement décroissante sur D lorsque :
   $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est :

1. strictement croissante sur D lorsque :
   $\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
2. strictement décroissante sur D lorsque :
   $\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
3. croissante sur D lorsque : $\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est :

1. strictement croissante sur D lorsque :
   $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
2. strictement décroissante sur D lorsque :
   $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
3. croissante sur D lorsque : $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
4. décroissante sur D lorsque : $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est :

1. strictement croissante sur D lorsque :
   $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
2. strictement décroissante sur D lorsque :
   $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
3. croissante sur D lorsque : $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
4. décroissante sur D lorsque : $\forall (x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
5. strictement monotone sur D lorsque f est strictement décroissante ou strictement croissante sur D ;

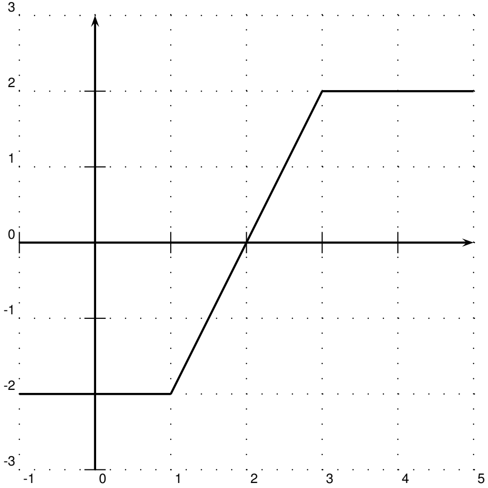
Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est :

1. strictement croissante sur D lorsque :
   $\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;
2. strictement décroissante sur D lorsque :
   $\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$;
3. croissante sur D lorsque : $\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$;
4. décroissante sur D lorsque : $\forall(x;\ y) \in D^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$;
5. strictement monotone sur D lorsque f est strictement décroissante ou strictement croissante sur D ;
6. monotone sur D lorsque f est croissante sur D ou décroissante sur D.

Exemples :

(1) La fonction dont la courbe représentative est :



Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que

1. f est minorée par m lorsque $\forall x \in D, f(x) \geq m$;

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que

1. f est minorée par m lorsque $\forall x \in D, f(x) \geq m$;
2. f est majorée par M lorsque $\forall x \in D, f(x) \leq M$;

Définition :

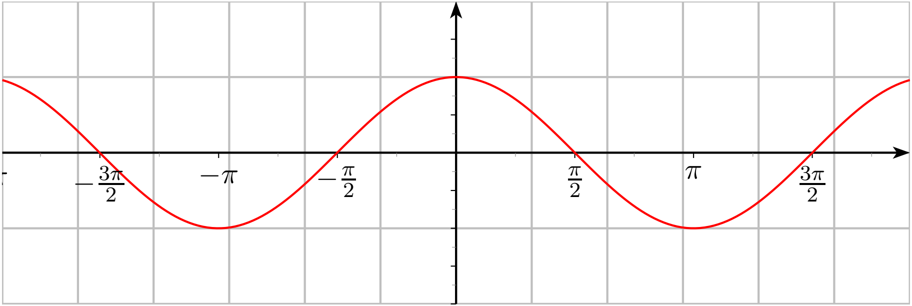
Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que

1. f est minorée par m lorsque $\forall x \in D, f(x) \geq m$;
2. f est majorée par M lorsque $\forall x \in D, f(x) \leq M$;
3. f est bornée lorsqu' elle est minorée et majorée.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que

1. f est minorée par m lorsque $\forall x \in D, f(x) \geq m$;
2. f est majorée par M lorsque $\forall x \in D, f(x) \leq M$;
3. f est bornée lorsqu' elle est minorée et majorée.



Plan

- On appelle taux d'accroissement de f en x_0, et on note $\tau_{x_0}(t)$ l'expression : $\tau_{x_0}(t) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$;

- On appelle taux d'accroissement de f en x_0, et on note $\tau_{x_0}(t)$ l'expression : $\tau_{x_0}(t) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$;
- Cette valeur correspond au coefficient directeur de la droite D_t passant par les points $M_{x_0}(x_0;\ f(x_0))$ et $M_t(t;\ f(t))$ appartenant à la courbe représentative de f ;

- On appelle taux d'accroissement de f en x_0, et on note $\tau_{x_0}(t)$ l'expression : $\tau_{x_0}(t) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$;
- Cette valeur correspond au coefficient directeur de la droite D_t passant par les points $M_{x_0}(x_0;\ f(x_0))$ et $M_t(t;\ f(t))$ appartenant à la courbe représentative de f ;
- Si, lorsque t tend vers x_0 le taux d'accroissement tend vers une limite finie, alors la droite D_t tend vers une droite non verticale que l'on appelle la tangente à la courbe représentative de f en x_0.

- On appelle taux d'accroissement de f en x_0, et on note $\tau_{x_0}(t)$ l'expression : $\tau_{x_0}(t) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$;
- Cette valeur correspond au coefficient directeur de la droite D_t passant par les points $M_{x_0}(x_0;\ f(x_0))$ et $M_t(t;\ f(t))$ appartenant à la courbe représentative de f ;
- Si, lorsque t tend vers x_0 le taux d'accroissement tend vers une limite finie, alors la droite D_t tend vers une droite non verticale que l'on appelle la tangente à la courbe représentative de f en x_0.

La courbe représentative d'une fonction n'admet pas forcément de tangente en un point. Par exemples :

- On appelle taux d'accroissement de f en x_0, et on note $\tau_{x_0}(t)$ l'expression : $\tau_{x_0}(t) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$;
- Cette valeur correspond au coefficient directeur de la droite D_t passant par les points $M_{x_0}(x_0;\ f(x_0))$ et $M_t(t;\ f(t))$ appartenant à la courbe représentative de f ;
- Si, lorsque t tend vers x_0 le taux d'accroissement tend vers une limite finie, alors la droite D_t tend vers une droite non verticale que l'on appelle la tangente à la courbe représentative de f en x_0.

La courbe représentative d'une fonction n'admet pas forcément de tangente en un point. Par exemples :

(1) La fonction racine carré admet une tangente en 0, mais cette dernière est verticale. Ceci correspond à un taux d'accroissement qui tend vers $+\infty$.

- On appelle taux d'accroissement de f en x_0, et on note $\tau_{x_0}(t)$ l'expression : $\tau_{x_0}(t) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$;
- Cette valeur correspond au coefficient directeur de la droite D_t passant par les points $M_{x_0}(x_0;\ f(x_0))$ et $M_t(t;\ f(t))$ appartenant à la courbe représentative de f ;
- Si, lorsque t tend vers x_0 le taux d'accroissement tend vers une limite finie, alors la droite D_t tend vers une droite non verticale que l'on appelle la tangente à la courbe représentative de f en x_0.

La courbe représentative d'une fonction n'admet pas forcément de tangente en un point. Par exemples :

(1) La fonction racine carré admet une tangente en 0, mais cette dernière est verticale. Ceci correspond à un taux d'accroissement qui tend vers $+\infty$.

(2) La fonction valeur absolue n'admet pas de tangente en 0. Elle admet, en revanche, deux demi-tangentes. Ceci correspond à un taux d'accroissement qui admet une limite différente à droite et à gauche, donc qui n'admet pas de limite.

Définition :

Soit f une fonction réelle. On dit que f est dérivable en $x_0 \in D$ lorsque $\tau_{x_0}(t)$ admet une limite finie quand t tend vers x_0.

Définition :

Soit f une fonction réelle. On dit que f est dérivable en $x_0 \in D$ lorsque $\tau_{x_0}(t)$ admet une limite finie quand t tend vers x_0. On note alors : $f'(x_0) = \lim\limits_{t \to x_0} \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ et on appelle ce réel le nombre dérivé de f en x_0.

Définition :

Soit f une fonction réelle. On dit que f est dérivable en $x_0 \in D$ lorsque $\tau_{x_0}(t)$ admet une limite finie quand t tend vers x_0. On note alors : $f'(x_0) = \lim\limits_{t \to x_0} \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ et on appelle ce réel le nombre dérivé de f en x_0.

Proposition

Si f est dérivable en x_0, alors $\mathcal{C}_f$ admet une tangente non verticale en ce point d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Définition :

Soit f une fonction réelle. On dit que f est dérivable sur D lorsque f est dérivable en tout point $x_0 \in D$.

Définition :

Soit f une fonction réelle. On dit que f est dérivable sur D lorsque f est dérivable en tout point $x_0 \in D$. On définit ainsi une fonction qui à tout réel $x_0 \in D$ associe le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Définition :

Soit f une fonction réelle. On dit que f est dérivable sur D lorsque f est dérivable en tout point $x_0 \in D$. On définit ainsi une fonction qui à tout réel $x_0 \in D$ associe le nombre dérivé $f'(x_0)$. On appelle cette fonction la fonction dérivée de f.

Définition :

Soit f une fonction réelle. On dit que f est dérivable sur D lorsque f est dérivable en tout point $x_0 \in D$. On définit ainsi une fonction qui à tout réel $x_0 \in D$ associe le nombre dérivé $f'(x_0)$. On appelle cette fonction la fonction dérivée de f. On note f' cette fonction.

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

1.

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

1. (a) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I ;

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

1.
   (a) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I ;
   (b) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I ;

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

1.
   (a) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I ;
   (b) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I ;
   (c) $f' = 0$ sur I

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

1. (a) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I ;
   (b) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I ;
   (c) $f' = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

1.
   (a) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I ;
   (b) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I ;
   (c) $f' = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.
2.
   (a) Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I ;

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

1. (a) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I ;
   (b) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I ;
   (c) $f' = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.
2. (a) Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I ;
   (b) Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

1.
   (a) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I ;
   (b) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I ;
   (c) $f' = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.

2.
   (a) Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I ;
   (b) Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

3.
   (a) Si $f' \geq 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante sur I ;

Proposition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors :

1. (a) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I ;
   (b) f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur I ;
   (c) $f' = 0$ sur I si et seulement si f est constante sur I.
2. (a) Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I ;
   (b) Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.
3. (a) Si $f' \geq 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante sur I ;
   (b) Si $f' \leq 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est dérivable sur D et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$;

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est dérivable sur D et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$;
2. fg est dérivable sur D et : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est dérivable sur D et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$;
2. fg est dérivable sur D et : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. Si g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est dérivable sur D et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$;
2. fg est dérivable sur D et : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. Si g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D et :
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$
4. Si φ est dérivable sur D' et telle que $f \circ \varphi$ ait un sens, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur D'.

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est dérivable sur D et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$;
2. fg est dérivable sur D et : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. Si g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D et :
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$
4. Si φ est dérivable sur D' et telle que $f \circ \varphi$ ait un sens, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur D'. De plus : $(f \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x) \times f'(\varphi(x))$.

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ est dérivable sur D et $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$;
2. fg est dérivable sur D et : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. Si g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D et :
   $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$
4. Si φ est dérivable sur D' et telle que $f \circ \varphi$ ait un sens, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur D'. De plus : $(f \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x) \times f'(\varphi(x))$.
5. Les fonctions polynômiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur un ensemble D que l'on précisera et calculer leurs dérivées sur D.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^5}$; (b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$;

(c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; (d) $i(x) = x^4(x-1)^5(x+1)^6$.

Plan

Notations : Sauf mentions contraires :

- Les fonctions f et g sont définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$;

Notations : Sauf mentions contraires :

- Les fonctions f et g sont définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$;
- I est un intervalle (non vide) inclus dans D ;

Notations : Sauf mentions contraires :

- Les fonctions f et g sont définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$;
- I est un intervalle (non vide) inclus dans D ;
- x_0 est un point de I ou une borne finie de I ;

Notations : Sauf mentions contraires :

- Les fonctions f et g sont définies sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$;
- I est un intervalle (non vide) inclus dans D ;
- x_0 est un point de I ou une borne finie de I ;
- les lettres a et b représentent x_0, $+\infty$ ou $-\infty$.

➩ somme :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$						

➩ somme :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+L'$					

⇨ somme :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+L'$	$+\infty$				

⇨ somme :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$			

➩ somme :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$		

➩ somme :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

➪ somme :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

⇨ multiplication par un réel non nul :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x)$			

⇨ multiplication par un réel non nul :

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} \lambda f(x)$	λL		

⇨ multiplication par un réel non nul :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x)$	λL	$\lambda > 0 : +\infty$ $\lambda < 0 : -\infty$	

➩ multiplication par un réel non nul :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \lambda f(x)$	λL	$\lambda>0 : +\infty$ $\lambda<0 : -\infty$	$\lambda>0 : -\infty$ $\lambda<0 : +\infty$

➩ produit :

$\infty = \pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$				

➪ produit :

$\infty = \pm\infty.$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$	LL'			

⇨ produit :

$\infty = \pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	LL'	∞		

⇨ produit :

$\infty = \pm\infty.$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	LL'	∞	FI	

➯ produit :

$\infty = \pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$	LL'	∞	FI	∞

➩ quotient :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$L \neq 0$	0	L	∞
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$							

⇨ quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	$L\neq 0$	$L\neq 0$	0	L	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L'\neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$						

⇨ quotient :

$\lim_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$L \neq 0$	0	L	∞
$\lim_{x\to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$L > 0 : +\infty$ $L < 0 : -\infty$					

➪ quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	$L\neq 0$	$L\neq 0$	0	L	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L'\neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$L>0 : +\infty$ $L<0 : -\infty$	$L>0 : -\infty$ $L<0 : +\infty$				

➩ quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$L \neq 0$	0	L	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$L > 0 : +\infty$ $L < 0 : -\infty$	$L > 0 : -\infty$ $L < 0 : +\infty$	FI			

⇨ quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$L \neq 0$	0	L	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$L > 0 : +\infty$ $L < 0 : -\infty$	$L > 0 : -\infty$ $L < 0 : +\infty$	FI	FI		

⇨ quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L\neq 0$	$L\neq 0$	$L\neq 0$	0	L	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L'\neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$L>0 : +\infty$ $L<0 : -\infty$	$L>0 : -\infty$ $L<0 : +\infty$	FI	FI	0	

⇨ quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$L \neq 0$	0	L	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L' \neq 0$	0^+	0^-	0	0	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$L>0 : +\infty$ $L<0 : -\infty$	$L>0 : -\infty$ $L<0 : +\infty$	FI	FI	0	FI

⇨ composition :

Proposition

Soient f définie sur D et g définie sur D' telles que $g \circ f$ ait un sens. Alors :

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = L.$$

➩ composition :

Proposition

Soient f définie sur D et g définie sur D' telles que $g \circ f$ ait un sens. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} g \circ f(x) = L.$$

➩ composition :

Proposition

Soient f définie sur D et g définie sur D' telles que $g \circ f$ ait un sens. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a} g \circ f(x) = L.$$

➩ expressions rationnelles :

Limites en $\pm\infty$

⇨ expressions rationnelles :

Limites en $\pm\infty$

Méthode : On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme de plus haut degré.

⇨ expressions rationnelles :

Limites en $\pm\infty$

Méthode : On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme de plus haut degré.

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x-1}$.

⇨ expressions rationnelles :

Limites en $x_0 \in \mathbb{R}$

⇨ expressions rationnelles :

Limites en $x_0 \in \mathbb{R}$

Méthode : Si, dans le cas d'une expression rationnelle, nous avons une forme indéterminée en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors il est possible de factoriser le numérateur et le dénominateur par $x - x_0$.

⇨ expressions rationnelles :

Limites en $x_0 \in \mathbb{R}$

Méthode : Si, dans le cas d'une expression rationnelle, nous avons une forme indéterminée en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors il est possible de factoriser le numérateur et le dénominateur par $x - x_0$.

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

⇨ croissances comparées :

Proposition

Soient α et β deux nombres strictement positifs. Alors :

⇨ croissances comparées :

Proposition

Soient α et β deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0\,;$

⇨ croissances comparées :

Proposition

Soient α et β deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0\,;$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\,|\ln(x)|^{\beta} = 0\,;$

⇨ croissances comparées :

Proposition

Soient α et β deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0\,;$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\,|\ln(x)|^\beta = 0\,;$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(e^x)^\beta} = 0\,;$

⇨ croissances comparées :

Proposition

Soient α et β deux nombres strictement positifs. Alors :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0\,;$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\,|\ln(x)|^{\beta} = 0\,;$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{(e^{x})^{\beta}} = 0\,;$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^{\alpha}\,(e^{x})^{\beta} = 0.$

⇨ expressions avec radicaux :

Méthode : pour lever des formes indéterminées, on peut utiliser l'expression conjuguée.

➩ expressions avec radicaux :

Méthode : pour lever des formes indéterminées, on peut utiliser l'expression conjuguée. On rappelle que l'expression conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et réciproquement.

⇨ expressions avec radicaux :

Méthode : pour lever des formes indéterminées, on peut utiliser l'expression conjuguée. On rappelle que l'expression conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et réciproquement.

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$.

⇨ utilisation de la dérivabilité en un point :

RAPPEL : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

⇨ utilisation de la dérivabilité en un point :

RAPPEL : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Proposition

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$; (b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$;

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; (d) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère usuel $\mathcal{R}$.

⇨ asymptotes horizontales :

Définition :

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $y = b$ comme asymptote horizontale lorsque

⇨ asymptotes horizontales :

Définition :

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $y = b$ comme asymptote horizontale lorsque f admet b pour limite en $+\infty$ ou $-\infty$.

➪ asymptotes verticales :

Définition :

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $x = x_0$ comme asymptote verticale lorsque

⇨ asymptotes verticales :

Définition :

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $x = x_0$ comme asymptote verticale lorsque f admet $+\infty$ ou $-\infty$ pour limite à droite ou à gauche de x_0.

⇨ asymptotes obliques :

Définition :

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $y = ax + b$ comme asymptote oblique lorsque :

⇨ asymptotes obliques :

Définition :

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $y = ax + b$ comme asymptote oblique lorsque : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

⇨ asymptotes obliques :

Définition :

On dit que $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation : $y = ax + b$ comme asymptote oblique lorsque : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

Exercice

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$. En déduire que la fonction f d'expression $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on donnera une équation réduite.

Plan

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

(1) Déterminer le domaine de définition D.

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

(1) Déterminer le domaine de définition D.

(2) Étudier la périodicité de f :

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

(1) Déterminer le domaine de définition D.

(2) Étudier la périodicité de f : si f est T-périodique, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$.

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

(1) Déterminer le domaine de définition D.

(2) Étudier la périodicité de f : si f est T-périodique, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$. On obtiendra alors la courbe représentative de f en translatant le morceau de courbe obtenu sur $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$.

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

(1) Déterminer le domaine de définition D.

(2) Étudier la périodicité de f : si f est T-périodique, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$. On obtiendra alors la courbe représentative de f en translatant le morceau de courbe obtenu sur $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$.

(3) Déterminer si f est paire ou impaire.

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

(1) Déterminer le domaine de définition D.

(2) Étudier la périodicité de f : si f est T-périodique, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$. On obtiendra alors la courbe représentative de f en translatant le morceau de courbe obtenu sur $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$.

(3) Déterminer si f est paire ou impaire. Si tel est le cas, il suffit d'étudier la fonction sur $[0;\ +\infty[\cap D$, puis de compléter par symétrie (par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine du repère).

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

(1) Déterminer le domaine de définition D.

(2) Étudier la périodicité de f : si f est T-périodique, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$. On obtiendra alors la courbe représentative de f en translatant le morceau de courbe obtenu sur $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$.

(3) Déterminer si f est paire ou impaire. Si tel est le cas, il suffit d'étudier la fonction sur $[0;\ +\infty[\cap D$, puis de compléter par symétrie (par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine du repère).

(4) Étudier les variations de f en calculant f' et en étudiant le signe de cette expression.

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

(1) Déterminer le domaine de définition D.

(2) Étudier la périodicité de f : si f est T-périodique, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$. On obtiendra alors la courbe représentative de f en translatant le morceau de courbe obtenu sur $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$.

(3) Déterminer si f est paire ou impaire. Si tel est le cas, il suffit d'étudier la fonction sur $[0;\ +\infty[\cap D$, puis de compléter par symétrie (par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine du repère).

(4) Étudier les variations de f en calculant f' et en étudiant le signe de cette expression.

(5) Calculer les limites aux bords du domaine d'étude pour dresser le tableau de variations de f.

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

(1) Déterminer le domaine de définition D.

(2) Étudier la périodicité de f : si f est T-périodique, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$. On obtiendra alors la courbe représentative de f en translatant le morceau de courbe obtenu sur $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$.

(3) Déterminer si f est paire ou impaire. Si tel est le cas, il suffit d'étudier la fonction sur $[0;\ +\infty[\cap D$, puis de compléter par symétrie (par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine du repère).

(4) Étudier les variations de f en calculant f' et en étudiant le signe de cette expression.

(5) Calculer les limites aux bords du domaine d'étude pour dresser le tableau de variations de f.

(6) Déterminer les éventuelles asymptotes et les tangentes aux points figurant sur le tableau de variations.

En l'absence d'indications, les étapes à suivre pour étudier une fonction sont les suivantes :

(1) Déterminer le domaine de définition D.

(2) Étudier la périodicité de f : si f est T-périodique, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$. On obtiendra alors la courbe représentative de f en translatant le morceau de courbe obtenu sur $\left[-\frac{T}{2};\ \frac{T}{2}\right] \cap D$.

(3) Déterminer si f est paire ou impaire. Si tel est le cas, il suffit d'étudier la fonction sur $[0;\ +\infty[\cap D$, puis de compléter par symétrie (par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine du repère).

(4) Étudier les variations de f en calculant f' et en étudiant le signe de cette expression.

(5) Calculer les limites aux bords du domaine d'étude pour dresser le tableau de variations de f.

(6) Déterminer les éventuelles asymptotes et les tangentes aux points figurant sur le tableau de variations.

(7) Tracer la courbe représentative de f avec les éventuelles asymptotes ou tangentes aux points remarquables.

Proposition (Inégalité fondamentale du logarithme)

Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

Proposition (Inégalité fondamentale du logarithme)

Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

conséquence :

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x.$

Proposition (Inégalité fondamentale du logarithme)

Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

conséquence :

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$. En effet, en appliquant l'inégalité précédente en e^x, nous obtenons : $\ln(e^x) \leq e^x - 1$

Proposition (Inégalité fondamentale du logarithme)

Pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

conséquence :

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$. En effet, en appliquant l'inégalité précédente en e^x, nous obtenons : $\ln(e^x) \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x \leq e^x - 1 \Leftrightarrow x+1 \leq e^x$.

1. Généralités
   - Domaine de définition et opérations usuelles
   - Courbe représentative d'une fonction
   - Fonctions périodiques, paires et impaires
   - Sens de variation d'une fonction
   - Fonctions majorées, minorées et bornées
2. Dérivée d'une fonction
   - Nombre dérivé en un point et tangente à la courbe représentative
   - Fonction dérivée
   - Calculs de fonctions dérivées
3. Limites et asymptotes
   - Opérations élémentaires sur les limites
   - Quelques techniques pour lever une forme indéterminée
   - Asymptotes
4. Plan d'étude d'une fonction et applications
   - Plan d'étude d'une fonction
   - Inégalités classiques
   - Exemple d'application : le problème de la boîte

Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on dispose d'une feuille carrée (en carton) dont le côté est de longueur a ($a \neq, 0$). À chacun des quatre angles, on découpe un carré de longueur x et on rabat les quatre angles perpendiculairement. On cherche x pour obtenir une boîte de volume maximal.