Espaces vectoriels

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Manipuler la notion de combinaison linéaire et de vecteurs dans d'autres espaces que ceux issus de la géométrie usuelle ;
- M2 Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ;
- M3 Étudier l'intersection ou la somme de sous -espaces vectoriels ;
- M4 Démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires ;
- M5 Montrer qu'une famille est libre ou non ;
- M6 Montrer qu'une famille est génératrice ou non.

On note dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Plan

Définition 1:

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne :

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (\overrightarrow{x}\,;\overrightarrow{y}\,) & \mapsto & \overrightarrow{x}+\overrightarrow{y} \end{array}$$

et d'une multiplication externe :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda;\overrightarrow{x}\,) & \mapsto & \lambda.\overrightarrow{x} \end{array}$$

1. Pour E muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel) lorsque :
   - (i) $+$ est associative
   - (ii) $+$ est commutative
   - (iii) $+$ admet un élément neutre dans E appelé vecteur nul et noté $\overrightarrow{0}_E$ ou $\overrightarrow{0}$
   - (iv) tout élément $\overrightarrow{x}$ de E admet un opposé $-\overrightarrow{x}$ dans E.
   - (v) Pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in E^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$;
     $$\left.\begin{array}{l} \lambda.(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u}+\lambda.\overrightarrow{v} \\ (\lambda+\mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u}+\mu.\overrightarrow{u} \end{array}\right\}\text{(distributivité mixte) ;}$$
     $$\left.\lambda.(\mu.\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu).\overrightarrow{v}\ \right\}\text{(associativité mixte) ;}$$
     $$1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$$
2. Lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les éléments de E sont appelés les vecteurs (on les note donc, au moins au début, avec une flèche), et les éléments de $\mathbb{K}$ les scalaires.

1. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni des deux lois suivantes :
$$\bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} ; \quad \bullet\ \lambda. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$
est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Soient $(n;p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition matricielle comme loi interne et de la multiplication par un scalaire d'une matrice est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
3. L'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni des deux opérations suivantes :
   - $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$;
   - $\lambda.(u_n) = (\lambda u_n)$.

   est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
4. L'ensemble des applications de I (intervalle réel) à valeurs dans E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{F}(I, E)$ avec les opérations $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ et $\lambda.f : x \mapsto \lambda f(x)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2:

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$, ..., $\overrightarrow{x_p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) des vecteurs de E.

1. On dit que $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$, ..., $\overrightarrow{x_p}$ lorsqu'il existe des scalaires : λ_1, λ_2, ..., λ_p tels que :

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{x_1} + ... + \lambda_p.\overrightarrow{x_p} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{x_k}\,;$$

2. On note $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_p})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$, ..., $\overrightarrow{x_p}$.

Proposition 1

Si $\overrightarrow{u}_p \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1; \cdots; \overrightarrow{u}_{p-1}\right)$ alors : $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1; \cdots; \overrightarrow{u}_{p-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1; \cdots; \overrightarrow{u}_p\right)$.

Exercice 1

[M1] La matrice $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$?

Plan

Définition 3:

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E lorsque :

1. (i) $F \subset E$;
2. (ii) $\overrightarrow{0_E} \in F$;
3. (iii) pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in F^2$ et scalaires $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v} \in F$ (F est stable par combinaisons linéaires).

REMARQUE : En pratique, pour vérifier (iii) de la proposition précédente, il suffit de vérifier que : pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\underbrace{\overrightarrow{u}}_{\in F} + \lambda.\underbrace{\overrightarrow{v}}_{\in F} \in F$.

Proposition 2

Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si F est un sous espace vectoriel de E alors $(F,+,.)$ est un espace vectoriel.

Proposition 3

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{K}^3$. Alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $\Big(\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{K}); +; .\Big)$.

Proposition 4

Soient $(a; b; c) \in \mathbb{K}^3$. Alors l'ensemble des suites (u_n) vérifiant

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$ espace vectoriel de référence $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}; +; .)$.

Proposition 5

Soit $(n;p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors l'ensemble des solutions $X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$ du système linéaire associée à A :

$$AX = 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})}$$

est un sous-espace vectoriel de référence $(\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}); +; .)$.

Proposition 6

Soient $\overrightarrow{u_1};\cdots;\overrightarrow{u_p}$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Alors, $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1};\cdots;\overrightarrow{u_p})$ est un sous espace vectoriel de E.

On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$.

Exercice 2

[M2] Montrer que $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

[M3] Soit le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ muni des lois de composition interne et externe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Exercice 4

[M3] Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$. Montrer que F est engendré par une famille de vecteurs et est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Plan

Dans toute cette section, on note $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Proposition 7

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 4:

On appelle somme de F et G, et on note $F+G$, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x} \in E$ tels que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}$.

Proposition 8

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $(E;+;\cdot)$. Alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

REMARQUE : Si $F = \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, .., \overrightarrow{u_p})$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ et $G = \text{vect}(\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_r})$ $(r \in \mathbb{N}^*)$, alors $F+G = \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_r})$.

Définition 5:

On dit que F et G sont en somme directe, ou que $F+G$ est directe si tout élément $\overrightarrow{x}$ de $F+G$ admet une <u>unique</u> décomposition $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec : $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}$.

Proposition 9

Deux sous espaces vectoriels F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{\overrightarrow{0}_E\}$.

Définition 6:

On dit que F et G sont supplémentaires, et on note $E = F \oplus G$, si tout élément $\overrightarrow{x}$ de E admet une <u>unique</u> décomposition $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec : $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}$.

Proposition 10(caractérisation des sous-espaces vectoriels supplémentaires)

Nous avons équivalence entre :

- (i) $E = F \oplus G$;
- (ii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Exercice 5

[M3] On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\}$. Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle.

Exercice 6

[M3] Soit $A = \text{Vect}\Big((1,1,1);(1,1,0);(0,0,1)\Big)$ et $B = \text{Vect}((1,0,0))$.

1. Donner explicitement les éléments de A et de B.
2. Peut-on simplifier A?
3. Montrer que $A + B = \mathbb{R}^3$.

Exercice 7

[M3] Soit $F = \Big\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\Big\}, G = \text{Vect}\Big((1;1;1)\Big); H = \Big\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 / x-y-z=0\Big\}$. Les espaces F et G sont-ils en somme directe ? de même pour F et H ?

Exercice 8

[M4]

1. Déterminer si F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$:
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \right\} \text{ et } G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$
2. Si F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, donner la décomposition de n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ dans ces deux-espaces supplémentaires.

Plan

Définition 7:

Soit F un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$. On dit que la famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...,\overrightarrow{u_p})$ est une famille génératrice de F lorsque $F = \text{vect}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...,\overrightarrow{u_p})$.

REMARQUE :

1. Lorsque $F = \text{vect}(\overrightarrow{u})$, avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, on dit que F est une droite vectorielle.
2. Lorsque $F = \text{vect}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires on dit que F est un plan vectoriel.

Proposition 11

Soient $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ deux familles de vecteurs de l'espace vectoriel E telle que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E. Alors $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E *(Toute famille contenant une famille génératrice de E est génératrice de E)*.

Définition 8:

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de p vecteurs ($p \in \mathbb{N}^*$). On dit que :

1. la famille $\mathcal{F}$ est libre lorsque :
$$\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_p = 0 \end{cases}.$$
2. la famille $\mathcal{F}$ est liée si elle n'est pas libre, c'est à dire si il existe des scalaires : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non nuls simultanément tels que : $\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$;

REMARQUEs :

1. Si 0_E est un élément de la famille alors la famille est liée.
2. Deux vecteurs non nuls forment une famille libre si et seulement s'ils sont non colinéaires.

ATTENTION : Ceci est faux pour trois vecteurs

3. Trois vecteurs de l'espace forment une famille liée si et seulement s'ils sont coplanaires, cf. définition de coplanéarité dans le cours de géométrie dans l'espace.
4. Toute sous famille d'une famille libre est libre.

Proposition 12

Si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est libre et $\overrightarrow{u} \notin \mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$, alors $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u})$ est libre.

Définition 9:

Une famille finie de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}; \cdots; \overrightarrow{u_n})$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une base si elle est libre et génératrice.

Proposition 13(caractérisation des bases)

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$, $(p \in \mathbb{N}^*)$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Nous avons équivalence entre :

(i) $\mathcal{B}$ est une base de E ;

(ii) Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$. Dans ce cas, nous avons : $\overrightarrow{u} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k}$ pour un unique p-uplet : $(\lambda_1; \ldots; \ \lambda_p)$ appelé composantes de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}$.

L'unique $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelée la matrice colonne des **coordonnées** de x dans la base $(\overrightarrow{u_1}; \cdots; \overrightarrow{u_n})$.

Proposition 14

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{u_{m+1}}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une famille libre d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, $F = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_{m+1}} \ldots, \overrightarrow{u_p}\right)$ sont en somme directe.

conséquence :

Soient $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{u_{m+1}}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ une base d'un espace vectoriel E, $F = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_{m+1}}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\right)$. Alors : $E = F \oplus G$.

Exercice 9

[M6] Montrer que : $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 10

[M5 - M6] $B = \{\begin{pmatrix}a & a+b\\b & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})/(a;b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que B est engendré par une famille de deux vecteurs que l'on précisera puis tester la liberté de cette dernière.

Exercice 11

[M5] On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Soient g_0, g_1, g_2 les trois vecteurs de E définis par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = x^2,$$

donc $g_i(x) = x^i$. La famille $\Big(g_0; g_1; g_2\Big)$ est-elle libre ou liée ?

2. Soient f_1, f_2, f_3 les trois vecteurs de E définis par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

Étudier la liberté des famille $(f_1; f_2)$ et $\Big(f_1; f_2; f_3\Big)$