# Espaces vectoriels

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

On note dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# Plan

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que $.$ est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que . est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;
2. Pour $E$ muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que $.$ est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;
2. Pour $E$ muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :
   (i) $+$ est associative ;

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que $.$ est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;
2. Pour $E$ muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :
   (i) $+$ est associative ;
   (ii) $+$ est commutative

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que . est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;
2. Pour $E$ muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :
   (i) $+$ est associative ;
   (ii) $+$ est commutative
   (iii) $+$ admet un élément neutre dans $E$ appelé vecteur nul et noté $\overrightarrow{0}_E$ ou $\overrightarrow{0}$

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que . est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;
2. Pour $E$ muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :
   (i) $+$ est associative ;
   (ii) $+$ est commutative
   (iii) $+$ admet un élément neutre dans $E$ appelé vecteur nul et noté $\overrightarrow{0}_E$ ou $\overrightarrow{0}$
   (iv) tout élément $\overrightarrow{x}$ de $E$ admet un opposé $-\overrightarrow{x}$ dans $E$.

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que . est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;
2. Pour $E$ muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :
   - (i) $+$ est associative ;
   - (ii) $+$ est commutative
   - (iii) $+$ admet un élément neutre dans $E$ appelé vecteur nul et noté $\overrightarrow{0}_E$ ou $\overrightarrow{0}$
   - (iv) tout élément $\overrightarrow{x}$ de $E$ admet un opposé $-\overrightarrow{x}$ dans $E$.
   - (v) Pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in E^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$ ;

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que . est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;

2. Pour $E$ muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :
   (i) $+$ est associative ;
   (ii) $+$ est commutative
   (iii) $+$ admet un élément neutre dans $E$ appelé vecteur nul et noté $\overrightarrow{0}_E$ ou $\overrightarrow{0}$
   (iv) tout élément $\overrightarrow{x}$ de $E$ admet un opposé $-\overrightarrow{x}$ dans $E$.
   (v) Pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in E^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$ ;
   $$\left.\begin{array}{l}\lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v} \\ (\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}\end{array}\right\} \text{(distributivité mixte) ;}$$

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que . est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;

2. Pour $E$ muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :
   - (i) $+$ est associative ;
   - (ii) $+$ est commutative
   - (iii) $+$ admet un élément neutre dans $E$ appelé vecteur nul et noté $\overrightarrow{0}_E$ ou $\overrightarrow{0}$
   - (iv) tout élément $\overrightarrow{x}$ de $E$ admet un opposé $-\overrightarrow{x}$ dans $E$.
   - (v) Pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in E^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$ ;

$$\left.\begin{array}{l}\lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v} \\ (\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}\end{array}\right\} \text{(distributivité mixte) ;}$$

$$\left.\lambda.(\mu.\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu).\overrightarrow{v}\ \right\} \text{(associativité mixte) ;}$$

## Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que . est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;

2. Pour $E$ muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :

   (i) $+$ est associative ;
   (ii) $+$ est commutative
   (iii) $+$ admet un élément neutre dans $E$ appelé vecteur nul et noté $\overrightarrow{0}_E$ ou $\overrightarrow{0}$
   (iv) tout élément $\overrightarrow{x}$ de $E$ admet un opposé $-\overrightarrow{x}$ dans $E$.
   (v) Pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in E^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$ ;

$$\left.\begin{array}{l}\lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v} \\ (\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}\end{array}\right\} \text{(distributivité mixte) ;}$$

$$\left.\lambda.(\mu.\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu).\overrightarrow{v}\right\} \text{(associativité mixte) ;}$$

$$1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$$

# Définition :

Soit $E$ un ensemble.

1. On dit que . est une loi de composition externe sur $E$ lorsque pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in E$ ;
2. Pour $E$ muni d'une loi de composition interne notée $\ll + \gg$, et d'une loi de composition externe, notée $\ll . \gg$, on dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :
   - (i) $+$ est associative ;
   - (ii) $+$ est commutative
   - (iii) $+$ admet un élément neutre dans $E$ appelé vecteur nul et noté $\overrightarrow{0}_E$ ou $\overrightarrow{0}$
   - (iv) tout élément $\overrightarrow{x}$ de $E$ admet un opposé $-\overrightarrow{x}$ dans $E$.
   - (v) Pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in E^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$ ;

$$\left.\begin{array}{l}\lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v} \\ (\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}\end{array}\right\} \text{(distributivité mixte) ;}$$

$$\lambda.(\mu.\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu).\overrightarrow{v} \ \} \text{(associativité mixte) ;}$$

$$1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$$

3. Lorsque $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les éléments de $E$ sont appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ scalaires.

## ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ :

# ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des éléments de la forme : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec

$\begin{cases} x_1 \in \mathbb{K} \\ x_2 \in \mathbb{K} \\ \vdots \\ x_n \in \mathbb{K} \end{cases}$. On munit $\mathbb{K}^n$ des opérations suivantes :

# ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des éléments de la forme : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} x_1 \in \mathbb{K} \\ x_2 \in \mathbb{K} \\ \vdots \\ x_n \in \mathbb{K} \end{cases}$. On munit $\mathbb{K}^n$ des opérations suivantes :

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$ ;

# ➪ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des éléments de la forme : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} x_1 \in \mathbb{K} \\ x_2 \in \mathbb{K} \\ \vdots \\ x_n \in \mathbb{K} \end{cases}$. On munit $\mathbb{K}^n$ des opérations suivantes :

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ ;

# ➪ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des éléments de la forme : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} x_1 \in \mathbb{K} \\ x_2 \in \mathbb{K} \\ \vdots \\ x_n \in \mathbb{K} \end{cases}$. On munit $\mathbb{K}^n$ des opérations suivantes :

$$\bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} ; \quad \bullet \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \qquad .$$

# ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^n$ l'ensemble des éléments de la forme : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} x_1 \in \mathbb{K} \\ x_2 \in \mathbb{K} \\ \vdots \\ x_n \in \mathbb{K} \end{cases}$. On munit $\mathbb{K}^n$ des opérations suivantes :

$$\bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} ; \quad \bullet \ \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

# ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ :

**Proposition**

$\mathbb{K}^n$ muni des opérations précédentes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

# ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

## ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des opérations suivantes :

## ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des opérations suivantes :

- $(u_n + v_n) =$

## ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des opérations suivantes :

- $(u_n + v_n) = (u_n) + (v_n)$;

## ⇨ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des opérations suivantes :

- $(u_n + v_n) = (u_n) + (v_n)$;
- $(\lambda u_n) =$

# ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des opérations suivantes :

- $(u_n + v_n) = (u_n) + (v_n)$;
- $(\lambda u_n) = \lambda(u_n)$.

## ➩ l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On munit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des opérations suivantes :

- $(u_n + v_n) = (u_n) + (v_n)$;
- $(\lambda u_n) = \lambda(u_n)$.

### Proposition

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni des opérations précédentes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

# ➪ l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X,\ E)$ :

# ➩ l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X,\ E)$ :

Si $X$ est un ensemble et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{F}(X,\ E)$ l'ensemble des applications d'ensemble de départ $X$ et à valeurs dans $E$. On munit $\mathcal{F}(X,\ E)$ des opérations suivantes :

# ➪ l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X,\ E)$ :

Si $X$ est un ensemble et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{F}(X,\ E)$ l'ensemble des applications d'ensemble de départ $X$ et à valeurs dans $E$. On munit $\mathcal{F}(X,\ E)$ des opérations suivantes :

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ;

## ➩ l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X,\ E)$ :

Si $X$ est un ensemble et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{F}(X,\ E)$ l'ensemble des applications d'ensemble de départ $X$ et à valeurs dans $E$. On munit $\mathcal{F}(X,\ E)$ des opérations suivantes :

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ;
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

## ➩ l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X,\ E)$ :

Si $X$ est un ensemble et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{F}(X,\ E)$ l'ensemble des applications d'ensemble de départ $X$ et à valeurs dans $E$. On munit $\mathcal{F}(X,\ E)$ des opérations suivantes :

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ;
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

### Proposition

$\mathcal{F}(X,\ E)$ muni des opérations précédentes est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

# ⇨ l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ :

## ➩ l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ :

**Proposition**

$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, muni de l'addition et de la multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## Définition :

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) des vecteurs de $E$.

1. On dit que $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ lorsqu'il existe des scalaires : $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ tels que :

   $\overrightarrow{u} =$

## Définition :

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des vecteurs de $E$.

1. On dit que $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ lorsqu'il existe des scalaires : $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ tels que :

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + .... + \lambda_p.\overrightarrow{u_p} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k};$$

## Définition :

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des vecteurs de $E$.

1. On dit que $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ lorsqu'il existe des scalaires : $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ tels que :

$$\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + .... + \lambda_p.\overrightarrow{u_p} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k};$$

2. On note $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$.

## Définition :

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des vecteurs de $E$.

1. On dit que $\overrightarrow{u}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ lorsqu'il existe des scalaires : $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_p$ tels que :
$$\overrightarrow{u} = \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + .... + \lambda_p.\overrightarrow{u_p} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k};$$
2. On note $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$.

## Proposition

Si $\overrightarrow{u}_p \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1; \cdots; \overrightarrow{u}_{p-1}\right)$ alors : $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1; \cdots; \overrightarrow{u}_{p-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}_1; \cdots; \overrightarrow{u}_p\right)$.

# Plan

## Définition :

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ lorsque :

## Définition :

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ lorsque :

(i) $\overrightarrow{0} \in F$ ;

## Définition :

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ lorsque :

(i) $\overrightarrow{0} \in F$ ;

(ii) pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in F^2$ et scalaires $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v} \in F$

## Définition :

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ lorsque :

(i) $\overrightarrow{0} \in F$ ;

(ii) pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in F^2$ et scalaires $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v} \in F$ ($F$ est stable par combinaisons linéaires ).

## Proposition

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors : $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## Proposition

Si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors : $(F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## Exercice

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ?

(a) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 1 \right\}$ ;

(b) $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0 \right\}$.

## Proposition

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{K}^3$. Alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $\Big(\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{K}); +; .\Big)$.

## Proposition

Soit $ay'' + by' + cy = 0$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{K}^3$. Alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $\Big(\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{K}); +; .\Big)$.

REMARQUE : Il en est de même des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre $1$ à coefficients non constants (prendre $a = 0$).

## Proposition

Soient $(a;b;c) \in \mathbb{K}^2$. Alors l'ensemble des suites $(u_n)$ vérifiant

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$ espace vectoriel de référence $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}};+;.)$.

## Proposition

Soit $(n;p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*; A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.Alors l'ensemble des solutions $X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$ du système linéaire associée à $A$ :

$$AX = 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})}$$

est un sous-espace vectoriel de référence $(\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}); +; .)$.

## Proposition

Soient $(E,+,.)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) des vecteurs de $E$.

Alors $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$

## Proposition

Soient $(E,+,.)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) des vecteurs de $E$.

Alors $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

## Proposition

Soient $(E,+,.)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des vecteurs de $E$.

Alors $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$.

## Proposition

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) des vecteurs de $E$.

Alors $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$.

**conséquence :**

Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in F \end{cases}$, alors : $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

.

## Proposition

Soient $(E,+,.)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ des vecteurs de $E$.

Alors $\text{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$.

**conséquence :**

Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in F \end{array} \right.$ , alors : $\text{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \subset F$.

## Proposition

Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) des vecteurs de $E$.

Alors $\text{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$.

**conséquence :**

Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in F \end{cases}$, alors : $\text{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \subset F$. En effet, d'après précédemment, $\text{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un sous-espace vectoriel de $F$. Il est donc en particulier inclus dans $F$.

## Proposition

Soient $(E,+,.)$ un espace vectoriel et $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, ..., $\overrightarrow{u_p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) des vecteurs de $E$.

Alors $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

On l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p}$.

**conséquence :**

Si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in F \end{cases}$, alors : $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \subset F$. En effet, d'après précédemment, $\mathrm{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un sous-espace vectoriel de $F$. Il est donc en particulier inclus dans $F$.

## Exercice

Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$. Montrer que $F$ est engendré par une famille de vecteurs et est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

# Plan

Dans toute cette section, on note $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

## Proposition

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

## Proposition

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

## Exercice

On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \right\}$.
Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle et préciser une famille génératrice.

## Définition :

1. On appelle somme de $F$ et $G$, et on note $F+G$, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x} \in E$ tels que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}$.

## Définition :

1. On appelle somme de $F$ et $G$, et on note $F + G$, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x} \in E$ tels que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{array} \right.$ .

## Définition :

1. On appelle somme de $F$ et $G$, et on note $F+G$, l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{x} \in E$ tels que : $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}$.

## Proposition

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

## Définition :

On dit que $F$ et $G$ sont en somme directe, ou que $F+G$ est directe si tout élément $\overrightarrow{x}$ de $F+G$ admet une <u>unique</u> décomposition $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec : $\begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}$.

## Définition :

On dit que $F$ et $G$ sont en somme directe, ou que $F+G$ est directe si tout élément $\overrightarrow{x}$ de $F+G$ admet une unique décomposition $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, avec : $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}\in F\\ \overrightarrow{v}\in G\end{array}\right.$.

## Proposition

Deux sous espaces vectoriels $F$ et $G$ sont en somme directe si et seulement si $F\cap G=\{\overrightarrow{0}_E\}$.

## Définition :

On dit que $F$ et $G$ sont supplémentaires, et on note $E = F \oplus G$, lorsque tout élement $\overrightarrow{x}$ de $E$ admet une unique décomposition :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \text{ avec : } \begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}.$$

## Définition :

On dit que $F$ et $G$ sont supplémentaires, et on note $E = F \oplus G$, lorsque tout élement $\overrightarrow{x}$ de $E$ admet une unique décomposition :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \text{ avec : } \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{array} \right. .$$

## Proposition (caractérisation des sous-espaces supplémentaires)

Nous avons équivalence entre :

(i) $E = F \oplus G$ ;

## Définition :

On dit que $F$ et $G$ sont supplémentaires, et on note $E = F \oplus G$, lorsque tout élement $\overrightarrow{x}$ de $E$ admet une unique décomposition :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \text{ avec : } \begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}.$$

## Proposition (caractérisation des sous-espaces supplémentaires)

Nous avons équivalence entre :

(i) $E = F \oplus G$ ;

(ii) $F + G$ et $F \cap G$

## Définition :

On dit que $F$ et $G$ sont supplémentaires, et on note $E = F \oplus G$, lorsque tout élement $\overrightarrow{x}$ de $E$ admet une unique décomposition :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \text{ avec : } \begin{cases} \overrightarrow{u} \in F \\ \overrightarrow{v} \in G \end{cases}.$$

## Proposition (caractérisation des sous-espaces supplémentaires)

Nous avons équivalence entre :

(i) $E = F \oplus G$ ;

(ii) $E = F + G$ et $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.

## Exercice

Déterminer si $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{vect}\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ sont supplémentaires.

# Plan

## Définition :

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.

1. Lorsque $F = \mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$, on dit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est une famille génératrice de $F$ ;

## Définition :

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.

1. Lorsque $F = \mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$, on dit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est une famille génératrice de $F$ ;
2. Lorsque $F = \mathrm{vect}(\overrightarrow{u})$, avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, on dit que $F$ est une droite vectorielle.

## Définition :

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$.

1. Lorsque $F = \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$, on dit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_p})$ est une famille génératrice de $F$ ;
2. Lorsque $F = \text{vect}(\overrightarrow{u})$, avec $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, on dit que $F$ est une droite vectorielle.

## Proposition

Si $\overrightarrow{u_p} \in \text{vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}})$ et si $(u_1; \cdots; u_p)$ est génératrice de $(E,+,.)$ alors : $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{p-1}})$ est une famille génératrice de $(E,+,.)$.

## Définition :

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de $p$ vecteurs ($p \in \mathbb{N}^*$). On dit que :

1. $\mathcal{F}$ est liée lorsqu'il existe des scalaires : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non nuls simultanément tels que : $\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$ ;

## Définition :

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de $p$ vecteurs ($p \in \mathbb{N}^*$). On dit que :

1. $\mathcal{F}$ est liée lorsqu'il existe des scalaires : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non nuls simultanément tels que : $\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$ ;
2. $\mathcal{F}$ est libre lorsqu'elle n'est pas liée, c'est à dire lorsque :

## Définition :

Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de $p$ vecteurs ($p \in \mathbb{N}^*$). On dit que :

1. $\mathcal{F}$ est liée lorsqu'il existe des scalaires : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non nuls simultanément tels que : $\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$ ;
2. $\mathcal{F}$ est libre lorsqu'elle n'est pas liée, c'est à dire lorsque :

$$\lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_p.\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_p = 0 \end{cases}.$$

REMARQUES :

(1) Si $0_E$ est un élément de la famille alors la famille est liée.

REMARQUES :

(1) Si $0_E$ est un élément de la famille alors la famille est liée.

(2) Si la famille est composée d'un seul vecteur alors elle est libre ssi le vecteur n'est pas le vecteur nul.

REMARQUES :

(1) Si $0_E$ est un élément de la famille alors la famille est liée.

(2) Si la famille est composée d'un seul vecteur alors elle est libre ssi le vecteur n'est pas le vecteur nul.

(3) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

REMARQUES :

(1) Si $0_E$ est un élément de la famille alors la famille est liée.

(2) Si la famille est composée d'un seul vecteur alors elle est libre ssi le vecteur n'est pas le vecteur nul.

(3) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

(4) Deux vecteurs forment une famille libre si et seulement s'ils sont non colinéaires

REMARQUES :

(1) Si $0_E$ est un élément de la famille alors la famille est liée.

(2) Si la famille est composée d'un seul vecteur alors elle est libre ssi le vecteur n'est pas le vecteur nul.

(3) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

(4) Deux vecteurs forment une famille libre si et seulement s'ils sont non colinéaires

(5) Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ une famille de vecteurs. Alors $\mathcal{F}$ est liée si et seulement s'il existe $k \in [\![1; p]\!]$ tel que $\overrightarrow{u_k}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{k-1}}, \overrightarrow{u_{k+1}}, \ldots, \overrightarrow{u_p}$.

REMARQUES :

(1) Si $0_E$ est un élément de la famille alors la famille est liée.

(2) Si la famille est composée d'un seul vecteur alors elle est libre ssi le vecteur n'est pas le vecteur nul.

(3) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

(4) Deux vecteurs forment une famille libre si et seulement s'ils sont non colinéaires

(5) Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ une famille de vecteurs. Alors $\mathcal{F}$ est liée si et seulement s'il existe $k \in [\![1; p]\!]$ tel que $\overrightarrow{u_k}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_{k-1}}, \overrightarrow{u_{k+1}}, \ldots, \overrightarrow{u_p}$.

## Proposition

Si $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est libre et $\overrightarrow{u} \notin \mathrm{vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$, alors $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u})$ est libre.

## Exercice

1. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, et $f_1$, $f_2$, $f_3$ les trois vecteurs de $E$ définis par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \cos x, \quad f_2(x) = \sin x, \quad f_3(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

   Alors, démontrer la famille $(f_1; f_2)$ est libre. Démontrer que la famille $\left(f_1; f_2; f_3\right)$ est liée.

2. Soit $g_0$, $g_1$, $g_2$ les trois vecteurs de $E$ définis par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = x^2,$$

   donc $g_i(x) = x^i$. La famille $\left(g_0; g_1; g_2\right)$ est-elle libre ou liée ?

## Définition :

Une famille finie de vecteurs $(e_1; \cdots; e_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est une base si elle est libre et génératrice.

## Définition :

Une famille finie de vecteurs $(e_1; \cdots; e_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est une base si elle est libre et génératrice.

## Proposition (caractérisation des bases)

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$, $(p \in \mathbb{N}^*)$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Nous avons équivalence entre :

(i) $\mathcal{B}$ est une base de $E$ ;

(ii) Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$. Dans ce cas, nous avons : $\overrightarrow{u} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_1.\overrightarrow{u_i}$ pour un unique $p$-uplet : $(\lambda_1; \ldots;\ \lambda_p)$ appelé composantes de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}$.

## Définition :

Une famille finie de vecteurs $(e_1; \cdots; e_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ est une base si elle est libre et génératrice.

## Proposition (caractérisation des bases)

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$, $(p \in \mathbb{N}^*)$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Nous avons équivalence entre :

(i) $\mathcal{B}$ est une base de $E$ ;

(ii) Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$. Dans ce cas, nous avons : $\overrightarrow{u} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_1 . \overrightarrow{u_i}$ pour un unique $p$-uplet : $(\lambda_1; \ldots; \lambda_p)$ appelé composantes de $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}$.

L'unique $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ est appelée la matrice colonnes des **coordonnées** de $x$ dans la base $(e_1; \cdots; e_n)$.

## Proposition

Soit $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_p)$ est une famille libre d'éléments d'un espace vectoriel $E$. Alors, $F = \mathrm{Vect}\Big(u_1, \ldots, u_m\Big)$ et $G = \mathrm{Vect}\Big(u_{m+1}, \ldots, u_p\Big)$ sont en somme directe.

## Proposition

Soit $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_p)$ est une famille libre d'éléments d'un espace vectoriel $E$. Alors, $F = \operatorname{Vect}\left(u_1, \ldots, u_m\right)$ et $G = \operatorname{Vect}\left(u_{m+1}, \ldots, u_p\right)$ sont en somme directe.

**conséquence :**

Soit $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)$ une base d'un espace vectoriel $E$. Soit $F = \operatorname{Vect}\left(u_1, \ldots, u_m\right)$ et $G = \operatorname{Vect}\left(u_{m+1}, \ldots, u_n\right)$.

## Proposition

Soit $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_p)$ est une famille libre d'éléments d'un espace vectoriel $E$. Alors, $F = \text{Vect}\Big(u_1, \ldots, u_m\Big)$ et $G = \text{Vect}\Big(u_{m+1}, \ldots, u_p\Big)$ sont en somme directe.

**conséquence :**

Soit $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)$ une base d'un espace vectoriel $E$. Soit $F = \text{Vect}\Big(u_1, \ldots, u_m\Big)$ et $G = \text{Vect}\Big(u_{m+1}, \ldots, u_n\Big)$. Alors la famille $(u_1, \ldots, u_m)$ est une base de $F$, la famille $(u_{m+1}, \ldots, u_n)$ est une base de $G$,

## Proposition

Soit $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_p)$ est une famille libre d'éléments d'un espace vectoriel $E$. Alors, $F = \mathrm{Vect}\Big(u_1, \ldots, u_m\Big)$ et $G = \mathrm{Vect}\Big(u_{m+1}, \ldots, u_p\Big)$ sont en somme directe.

**conséquence :**

Soit $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)$ une base d'un espace vectoriel $E$. Soit $F = \mathrm{Vect}\Big(u_1, \ldots, u_m\Big)$ et $G = \mathrm{Vect}\Big(u_{m+1}, \ldots, u_n\Big)$. Alors la famille $(u_1, \ldots, u_m)$ est une base de $F$, la famille $(u_{m+1}, \ldots, u_n)$ est une base de $G$, et $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ :$E = F \oplus G$.

## Proposition

Soit $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_p)$ est une famille libre d'éléments d'un espace vectoriel $E$. Alors, $F = \mathrm{Vect}\Big(u_1, \ldots, u_m\Big)$ et $G = \mathrm{Vect}\Big(u_{m+1}, \ldots, u_p\Big)$ sont en somme directe.

**conséquence :**

Soit $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)$ une base d'un espace vectoriel $E$. Soit $F = \mathrm{Vect}\Big(u_1, \ldots, u_m\Big)$ et $G = \mathrm{Vect}\Big(u_{m+1}, \ldots, u_n\Big)$. Alors la famille $(u_1, \ldots, u_m)$ est une base de $F$, la famille $(u_{m+1}, \ldots, u_n)$ est une base de $G$, et $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ :$E = F \oplus G$. On dit alors que la base $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)$ de $E$ est adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$.