Espaces probabilisés finis

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- M1 Savoir reconnaître des situations d'équiprobabilité et faire des calculs élémentaires à l'aide d'outils de dénombrement.
- M2 Savoir utiliser les trois formules associées aux calculs de probabilités conditionnelles.
- M3 Savoir étudier l'indépendance de deux ou plusieurs évènements.

Plan

Définition 1:

On appelle **expérience aléatoire (ou épreuve)** une expérience pouvant amener un ou plusieurs résultats.
On appelle **univers** l'ensemble de tous les résultats possibles noté Ω.
Chacun des résultats s'appelle des **issues élémentaires**, des résultats possibles ou encore des réalisations.

Exemples :

1. On joue à pile ou face. On note P si la face fait pile et F si elle fait face. L'univers choisi est :

   $\Omega = \{P; F\}$

   Une issue élémentaire correspond à "J'ai obtenu Pile" ou "J'ai obtenu Face".
2. On lance un dé et on regarde le score obtenu. L'univers choisi est :

   $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

   Une issue élémentaire correspond à "J'ai obtenu le chiffre 1", ..., "J'ai obtenu le chiffre 6".
3. On lance une pièce jusqu'à obtenir le premier pile. L'univers choisi est :

   $\Omega = \mathbb{N}^*$

   Une issue élémentaire est par exemple "J'ai obtenu mon premier pile au 6 ième lancer".
4. On mesure le temps qu'il reste à vivre à une bactérie. L'univers choisi est :

   $\Omega = \mathbb{R}_+$

DANS TOUTE LA SUITE, on ne considère que des expériences aléatoires modélisées par un UNIVERS FINI.

Définition 2:

1. On appelle événement associé à une expérience aléatoire **tout sous-ensemble** de son univers Ω.
2. On appelle **événement élémentaire** tout événement qui est un **singleton.**
3. L'ensemble Ω est appelé **événement certain,** l'ensemble $\emptyset$ **l'événement impossible.**
4. L'ensemble des événements est donc **l'ensemble des sous-ensembles** de Ω, soit $\mathcal{P}(\Omega)$.

REMARQUE : L'ensemble des évènements $\mathcal{P}(\Omega)$ peut être décrit explicitement si Ω contient peu d'éléments. Par exemple, pour le lancer de la pièce, on a $\Omega = \{P; F\}$ et ainsi

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset; \{F\}; \{G\}; \{F; G\}\}.$$

Définition 3:

À partir de deux événements A et B, nous pouvons obtenir d'autres événements :

Écriture logique	Écriture ensembliste
Le contraire de A s'est réalisé	$\bar{A}$
A ou B se sont réalisés	$A \cup B$
A et B se sont réalisés	$A \cap B$
B s'est réalisé mais pas A	$B \setminus A = B \cap \overline{A}$

De plus, on dit que :

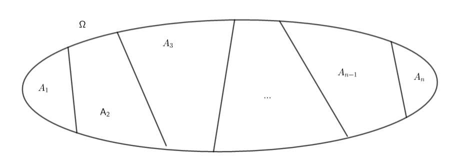
1. les événements A et B sont **incompatibles** lorsque A et B ne peuvent se réaliser simultanément, c'est à dire lorsque $A \cap B = \emptyset$.
2. les événements A et B sont **complémentaires** si $\overline{A} = B$. On a alors $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$

Définition 4:

Soit Ω un univers, on appelle **système complet d'événements**, la donnée d'un nombre fini d'événements $A_1, \ldots, A_n$ tels que toute éventualité soit dans un et un seul des événements A_i. C'est à dire que l'on veut :

- $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$,
- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (i \neq j) \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.

On dit aussi que les ensembles forment une **partition** de Ω.



Exemples :

1. Pour $\Omega = [\![1,10]\!]$, on peut prendre, $A_1 = \{1,3,5,7,9\}, A_2 = \{2,10\}, A_3 = \{4\}$ et $A_4 = \{6,8\}$.
2. Soit A un événement. Si $B = \overline{A}$ alors (A,B) forme un système complet d'événements.

Plan

Définition 5:

Soit Ω un univers fini associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements. Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une **application** $\mathbb{P}$: $\mathcal{P}(\Omega) \to [0;\ 1]$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) $\forall (A;\ B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

On dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini.

Proposition 1

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini. Alors, pour tous événements A et B,

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. En particulier $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Croissance de $\mathbb{P}$.)
- Si $(A_n)_{n \in I}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles alors $\mathbb{P}(\cup_{k \in I} A_k) = \sum_{k \in I} \mathbb{P}(A_k)$ avec I une partie finie de $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Proposition 2

Soit $\Omega = \{w_1;\ w_2;\dots;\ w_n\}$ un univers fini associé à une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des événements.

1. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\Big(\Omega;\mathcal{P}(\Omega)\Big)$. Soit $p_i = \mathbb{P}(\{w_i\})$ avec $i \in \{1;\cdots;n\}$. Alors

   - $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
   - $\forall i \in \{1;\cdots;n\}, p_i \geq 0.$

2. Réciproquement, soit $(p_i)_{i\in\{1;\cdots;n\}}$ une famille de nombres positifs de somme égale à 1. Soit $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ qui à un évènement A associe $\sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$. Alors $\mathbb{P}$ est une probabilité.

Définition 6:

Si Ω est un univers associé à une expérience aléatoire, la probabilité uniforme est la probabilité $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;\ 1]$ définie par $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

REMARQUES :

1. Il s'agit bien d'une probabilité d'après les propriétés du cardinal.
2. En particulier, si $\{w\}$ est un évènement élémentaire, $\mathbb{P}(\{w\}) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$.

Exercice 1

[-M1-] Une urne contient une boule noire, deux boules rouges et sept boules blanches. A chaque nouvelle expérience, préciser quel espace probabilisé peut la modéliser.

1. On pioche trois boules simultanément de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches ?
2. On pioche trois fois de suite une boule de l'urne en notant sa couleur puis en la remettant dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir les trois couleurs ?
3. On pioche n fois de suite une boule de l'urne $(n \in \mathbb{N}^*)$ en la remettant à chaque fois dans l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ? Au moins une rouge ?

Plan

Introduction.

(a) On lance deux fois une pièce de monnaie honnête. La probabilité d'obtenir deux fois PILE est donc $\frac{1}{4}$. Or si l'on sait que l'évènement B ≪ le premier lancer est un PILE ≫se produit également, la probabilité change : elle est alors égale à $\frac{1}{2}$. On veut plus généralement calculer la probabilité d'un évènement A sous la condition que l'évènement B se produit.

(b) On note Ω l'ensemble des femmes et des hommes dans un camps de vacances que l'on regroupe suivant les catégories ≪ plus de 20 ans ≫et ≪ moins de vingt ans ≫. Le tableau ci-dessous regroupe les données récoltées :

Âge / Sexe	- 20 ans	+ 20 ans	TOTAL
Hommes	3	2	5
Femmes	7	4	11
TOTAL	10	6	16

On prend une personne au hasard. La probabilité p qu'elle ait moins de 20 ans sachant que c'est un homme est donc ici : $p = \frac{3}{5}$. Si l'on note A ≪ la personne a moins de 20 ans ≫et B :≪ la personne est un homme ≫, alors :

$$p = \frac{3}{5} = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(B)} = \frac{\dfrac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}}{\dfrac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Définition 7:

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel, noté $\mathbb{P}(A|B)$), tel que :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposition 3

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et B un événement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors l'application $\mathbb{P}_B$, qui à tout événement A associe $\mathbb{P}(A|B)$, est une probabilité sur Ω.

Plan

Si l'on considère un évènment B de probabilité non nulle et un évènement A, nous pouvons écrire : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(A)$, puisque par définition : $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Plus généralement :

Proposition 4

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et A_1, A_2, ..., A_n n évènements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{n-1}}(A_n) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \dots \cap A_{k-1}}(A_k).
\end{aligned}$$

Théorème 1 (Formule des probablités totales)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

- Soit $(A_1,\ A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements, tels que $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ pour $k \in \{1; \cdots; n\}$. Alors pour tout événement B, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)\end{aligned}$$

- En particulier, $(A, \overline{A})$ formant un système complet d'évènements : si $\mathbb{P}(A) \in]0; 1[$ pour tout évènement B :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A}) \\ &= \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})\end{aligned}$$

REMARQUE : Si $\mathbb{P}(A_i) = 0$ pour un certain i alors en posant (par convention) $\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i) = 0$ la formule $\mathbb{P}(B) = \sum^{n} \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)$ reste vraie.

Théorème 2 (formule de Bayes)

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

- Pour tout événement $A; B$ avec $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ et $\mathbb{P}(A) > 0$:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

avec $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$

- Plus généralement, $(B_k)_{k\in\{1;\cdots;n\}}$ un système complet d'événements avec $\mathbb{P}(B_k) \in]0;1[$ pour tout entier $k \in \{1;\cdots;n\}$ et si A est un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$ alors

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}{\mathbb{P}(A)}$$

avec

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)$$

Exercice 2

[-M2-]

- **Contexte :** on considère six urnes numérotées de 1 à 6 contenant chacune k boules blanches et $6-k$ boules noires, k étant le numéro de l'urne.
- **Expérience :** On lance un dé, puis on pioche successivement et avec remise 8 boules dans l'urne portant le numéro inscrit sur le dé.
- **Question :** quelle est la probabilité d'obtenir 8 boules blanches ? 8 boules noires ?

Exercice 3

[-M2-] Léa et Jules s'entrainent au tir à la cible. Léa atteint 9 fois sur 10 sa cible mais Jules, grand débutant, n'atteint que 6 fois sur 10 sa cible. Léa laisse Jules s'entrainer et n'effectue un tir que 1 fois sur 3.
Un des joueurs tire et la cible est atteinte. Quelle est la probabilité que ce soit Jules ?

Plan

Définition 8:

Soit $(\Omega; \mathcal{P}(\Omega); \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.
Les événements A et B sont dit indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

REMARQUE : Si A et B sont indépendants, alors

1. $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$ puisque $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$.
2. $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$ en effectuant les mêmes calculs.

(avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$)

Proposition 5

Soient A et B deux évènements indépendants. Alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Définition 9:

Soit n un entier supérieur ou égal à deux et $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ n évènements. Les évènements $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ sont

1. deux à deux indépendants lorsque les évènements A_i et A_j sont indépendants pour $i \neq j$.
2. mutuellement indépendants lorsque pour tout sous-ensemble I de $[\![1;\ n]\!]$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \prod_{k\in I} \mathbb{P}(A_k)$.

REMARQUES :

1. Pour prouver que trois évènements A_1, A_2 et A_3 sont mutuellement indépendants, il faut vérifier que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)(\text{ prendre } I = \{1;\ 2\})\\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)(\text{ prendre } I = \{2;\ 3\})\\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)(\text{ prendre } I = \{1;\ 3\})\\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)(\text{ prendre } I = \{1;\ 2;\ 3\})
\end{aligned}$$

2. La notion d'indépendance mutuelle est plus forte que la notion d'indépendance deux à deux.

Exercice 5

[-M3-] On lance un dé honnête et on considère les deux événements : A « on obtient un multiple de 3 »et B « on obtient un résultat pair ». A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 6

[-M3-] On considère une famille avec deux enfants et on suppose que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille est de $\frac{1}{2}$. On note A « la famille a un garçon et une fille », B « l'enfant aîné est une fille »et C « le cadet est un garçon ». Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$