Limites et équivalents de fonctions

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Déterminer un équivalent simple d'une suite ou d'une fonction au voisinage d'un point ;
- M2 Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) au calcul de limites ;
- M3 Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) à la recherche de tangentes et de position par rapport à cette dernière ;
- M4 Appliquer les outils d'étude locale (équivalents, développements limites) pour obtenir le développement asymptotique d'une fonction (en particulier les asympotes obliques).

Plan

Définition 1:

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si

1. g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut être en a
2. $\lim_a \frac{f}{g} = 1$.

Proposition 1(propriétés de la relation d'équivalence)

1. $f(x) \sim_a f(x)$; (réflexivité)
2. Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors $g(x) \sim_a f(x)$; (symétrie)
3. Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $g(x) \sim_a h(x)$, alors $f(x) \sim_a h(x)$. (transitivité)

Proposition 2

1. $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g)$.
2. Si $f \sim_a g$ et $g = o_a(h)$, alors : $f = o_a(h)$.

Proposition 3

Si $f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_p(x-x_0)^p + a_{p+1}(x-x_0)^{p+1} + \dots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$, $(p \leq n)$, avec $a_p \neq 0$, alors :

$$f(x) \sim_{x_0} a_p(x-x_0)^p.$$

➩ Limite non nulle et équivalents :

Proposition 4

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ avec $\ell \neq 0$, alors $f(x) \sim_a \ell$.

➩ Équivalents de fonctions polynômiales :

Proposition 5

Soit $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_p x^p$ tels que : $p < n$, $a_p \neq 0$, $a_n \neq 0$. Alors :

1. $f(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$.
2. $f(x) \sim_0 a_p x^p$.

⇨ Autres équivalents usuels :

Proposition 6

Soit u une fonction réelle telle que $\lim_{x \to a} u(x) = 0$. Alors :

- $e^{u(x)} - 1 \sim_a u(x)$;
- $\ln(1 + u(x)) \sim_a u(x)$;
- $(1 + u(x))^\alpha - 1 \sim_a \alpha u(x)$;
- $\sin(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $\tan(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $1 - \cos(u(x)) \sim_a \frac{u^2(x)}{2}$;
- $\mathrm{sh}(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $\mathrm{th}(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $\mathrm{ch}(u(x)) - 1 \sim_a \frac{u^2(x)}{2}$;
- $\arcsin(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $\arctan(u(x)) \sim_a u(x)$.

Tous ces équivalents usuels ne s'appliquent **UNIQUEMENT** que lorsque $\lim_{x \to a} u(x) = 0$.

⇨ Inégalités et équivalents :

Proposition 7

Soient f, g, h trois fonctions réelles telles que : $g \leq f \leq h$ sur un voisinage de a et $g \sim_a h$. Alors : $f \sim_a g \sim_a h$.

Proposition 8

Les opérations usuelles sont les suivantes :

- **(multiplication par un réel) :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, si $f \sim_a g$, alors $\lambda f \sim_a \lambda g$;
- **(produit) :** Si $f \sim_a h_1$ et $g \sim_a h_2$, alors $fg \sim_a h_1 h_2$;
- **(quotient) :** Pour g non nulle au voisinage de a, si $f \sim_a h_1$ et $g \sim_a h_2$ alors $\frac{f}{g} \sim_a \frac{h_1}{h_2}$;
- **(puissance) :** Pour $g > 0$ au voisinage de a et $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f \sim_a g$, alors $f^\alpha \sim_a g^\alpha$.

1. Pour le dernier point ci-dessus, α doit être **CONSTANT** : par exemple, $e^x \sim_0 1$ mais $(e^x)^{1/x} \nsim_0 \underbrace{1^{1/x}}_{=1}$ puisque $(e^x)^{1/x} = e$;
2. De même, on ne peut ni sommer ni soustraire. Par exemple $x+1 \sim_{+\infty} x$ mais $1 = (x+1) - x \nsim_{+\infty} \underbrace{x - x}_{=0}$;
3. Enfin, nous ne pouvons composer les équivalents par une fonction. Par exemple $x+1 \sim_{+\infty} x$, mais $e^{x+1} = ee^x \nsim_{+\infty} e^x$ (le quotient tend vers $e \neq 1$).

Exercice 1

[M1] Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

(a) $n\left(e^{1/n}-1\right)$; (b) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$; (c) $\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$;

(d) $n^2\left(e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)$.

Exercice 2

[M1] Déterminer un équivalent de :
$\ln(x)$ en 1; $\quad \sqrt{1+x}-1$ en $+\infty$

Exercice 3

[M1] Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point proposé :

(a) $e^x - e$, $a = 1$; (b) $\dfrac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}$, $a = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4

[M1] Déterminer un équivalent simple de $1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 5

[M1] **Composition d'un équivalent ?** Soit a un réel quelconque. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose de plus que $f \underset{a}{\sim} g$ et que f est strictement positive au voisinage de a. Démontrer que si f admet une limite $\ell > 0$ différente de 1 en a, alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a. Qu'en est-il si f admet une limite égale à $+\infty$? égale à 0?

Plan

Proposition 9

Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$;

Proposition 10

Si $f \sim_a g$ et si $g > 0$ sur un voisinage de a alors il en est de même de f.

conséquence :

(Recherche d'extremums locaux) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$, un point intérieur à I. Si $f(x) =_{x \to a} f(a) + a_n(x-a)^n + o_a((x-a)^n)$, avec $a_n \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \sim_{x \to a} a_n(x-a)^n$ et

1. si n est impair alors a n'est pas un extremum
2. si n est pair et $a_n > 0$ alors a est un minimum local.
3. si n est pair et $a_n < 0$ alors a est un maximum local.

Proposition 11

Si f admet un $DL_p(x_0)$ $(x_0 \in D)$, de la forme :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p),$$

avec $a_p \neq 0$, alors :

- la courbe représentative de f admet en x_0 une tangente d'équation : $y = a_0 + a_1(x - x_0)$;
- la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de x_0 est donnée par le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

On effectue le changement de variables $x = \frac{1}{h} \Leftrightarrow h = \frac{1}{x}$, ainsi

$$x \to +\infty \Leftrightarrow h \to 0.$$

Puis on doit chercher a, b tels que :
$\boxed{f(x) - ax - b \to_{x \to +\infty} 0 \Leftrightarrow f(\frac{1}{h}) - \frac{a}{h} - b \to_{h \to 0} 0}$. On utilise pour ceci l'outil développement limité dans l'expression obtenue après changement de variable.

Exercice 6

[M2] Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - e^{x/2}}{\ln(1+x) - x}$.

Exercice 7

[M2] Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

(a) $\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}$;

(b) $\dfrac{\ln(1+2x^2)}{\cos(3x)-1}$;

(c) $\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(2x^2)}$;

(d) $\frac{x\ln(\cos(x))}{\tan(x)-x}$;

(e) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x}{\tan(x) - x}$;

(f) $g(x) = \frac{1+\ln(\sqrt{1+x^2}) - \mathrm{ch}(x)}{(1-\cos(x))^2}$.

Exercice 8

[M3]
Soit $f : x \mapsto e^x + \ln(1+x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et préciser la régularité de f sur cet ensemble.
2. Effectuer un développement limité en 0 à l'ordre 3 afin de donner l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position relative de la tangente en $A(0; f(0))$ et de la courbe représentative de f.

Exercice 9

[M4] Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x\exp\left(\dfrac{2x+1}{x^2}\right)$ admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ dont on donnera une équation cartésienne. Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à son asymptote au voisinage de $\pm\infty$. On donne une représentation de sa courbe représentative ci-dessous :