Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants avec seconds membres constants, trigonométriques ou exponentiel.

Plan

Définition 1:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, on écrit $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, où f_1 et f_2 sont à valeurs réelles.

1. On dit que f est dérivable sur D lorsque f_1 et f_2 sont dérivables sur D ;
2. On appelle fonction dérivée la fonction, notée f', telle que $f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)$ pour $x \in D$.

Proposition 1

Soient f et g deux fonctions dérivables sur D. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{C}, f + \lambda g$ est dérivable sur D et $\forall x \in D,\ (f + \lambda g)'(x) = f'(x) + \lambda g'(x)$;
2. fg est dérivable sur D et : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. si de plus g ne s'annule pas sur D, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur D et :
   $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} ;$$
4. la fonction définie sur D par $h(x) = e^{f(x)}$ est dérivable sur D et $h'(x) = f'(x)e^{f(x)}$.

On note dorénavant : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2:

On appelle équation différentielle linéaire :

1. du premier ordre à coefficients constants toute équation de la forme : $ay'(x) + by(x) = g(x)$ avec $a \in \mathbb{K}^*$, $b \in \mathbb{K}$ et g une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{K}$;
2. du second ordre à coefficients constants toute équation de la forme : $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$ avec $a \in \mathbb{K}^*$, $b \in \mathbb{K}$, $c \in \mathbb{K}$ et g une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{K}$.

REMARQUEs :

1. Les nombres a, b, c sont appelés coefficients de l'équation différentielle ;
2. g est appelé second membre de l'équation différentielle ;
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit que l'équation différentielle est réelle. Sinon, on dit que l'équation différentielle est complexe.
4. Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions qui vérifient une telle relation.

Définition 3:

On appelle équation différentielle homogène associée à :

1. $ay'(x) + by(x) = g(x)$ l'équation différentielle : $(\mathrm{E_H})\ :\ ay'(x) + by(x) = 0$;
2. $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x)$ l'équation différentielle : $(\mathrm{E_H})\ :\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

REMARQUEs :

1. L'équation homogène est aussi appelée équation sans second membre ;
2. L'équation avec second membre est appelée équation complète.

Proposition 2(linéarité de l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E_H})$)

Si y_1 et y_2 sont solutions de $(\mathrm{E_H})$ $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$, alors $\forall(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de $(\mathrm{E_H})$.

Proposition 3

1. si y_P et y_H sont respectivement solutions de l'équation complète et de l'équation homogène, alors $y = y_H + y_P$ est solution de l'équation complète.
2. Réciproquement, toute solution y_1 de l'équation complète s'écrit sous la forme : $y_1 = y_H + y_P$, où y_H est solution de l'équation homogène, et y_P est solution particulière de l'équation complète.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle : (E) $y'' + 2y' + y = 0$. Soit f une solution de (E). On pose : $g(x) = f(x)e^x$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = 0$. Qu'en déduit-on pour g ?
2. En déduire que si f est solution de (E), alors $\exists (a;\ b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (ax + b)e^{-x}$.
3. Étudier la réciproque.

Plan

Proposition 4

Soit $(\mathrm{E_H})$ l'équation différentielle homogène $ay'(x)+by(x)=0$ avec $a\neq 0$.
Alors l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E_H})$, noté S_H est :

$$S_H=\left\{Ce^{-bx/a}, C\in\mathbb{K}\right\}.$$

Définition 4:

Soit $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = 0$, $a \neq 0$. On appelle équation caractéristique associée l'équation du second degré : $ar^2 + br + c = 0$.

Proposition 5

Pour $r \in \mathbb{K}$, la fonction définie par $f(x) = e^{rx}$ est solution de l'équation différentielle :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0,$$

si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique associée.

REMARQUE : On aurait pu de même définir l'équation caractéristique d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants : $ar + b = 0$. 2- La proposition précédente est donc également vraie dans le cas de l'ordre 1 : en effet : $e^{-bx/a}$ est solution de l'équation différentielle et $r = -b/a$ est solution de l'équation caractéristique associée.

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

Proposition 6(solutions complexes de l'équation différentielle)

Soit $(\mathrm{E_H})$: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ avec $a \neq 0$. Alors, l'ensemble des solutions de $(\mathrm{E_H})$, noté S_H est :

1. si $\Delta \neq 0$,
$$S_H = \{\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}\},$$
où r_1 et r_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique associée ;
2. si $\Delta = 0$,
$$S_H = \{(\lambda + \mu x)e^{r_0 x}, \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}\},$$
où r_0 est la solution double de l'équation caractéristique associée.

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

Théorème 1(cas des équations différentielles réelles)

Soit $(\mathrm{E_H})$: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ avec $a \neq 0$ et $(a;\ b;\ c) \in \mathbb{R}^3$. Alors, l'ensemble des solutions **RÉELLES** de $(\mathrm{E_H})$, noté S_H est

1. si $\Delta > 0$,
$$S_H = \left\{\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$
oùr_1 et r_2 sont les deux solutions réelles distinctes de l'équation caractéristique associée ;
2. si $\Delta = 0$,
$$S_H = \left\{(\lambda + \mu x)e^{r_0 x}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$
où r_0 est la solution double de l'équation caractéristique associée ;
3. si $\Delta < 0$,
$$S_H = \left\{(\lambda \cos(Bx) + \mu \sin(Bx))e^{Ax}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$
où $A + iB$ est une des deux solutions complexes de l'équation caractéristique associée.

Exercice 2

Donner l'ensemble des solutions réelles, ainsi que l'ensemble des solutions complexes des équations différentielles ci-dessous :

(a) $y'' - y = 0$. (b) $y'' - 2y' + y = 0$ (c) $y'' + y = 0$. (d) $y'' - 2y' + 5$

Plan

Lorsque le second membre est constant, on pourra toujours trouver une solution particulière constante.

Lorsque le second membre est de la forme exponentielle, on cherche une solution particulière ayant une « forme similaire ».

Proposition 7

On considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants (d'ordre 1 ou 2) de second membre g de la forme $g(x) = \alpha e^{mx}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{C}$. Alors l'équation différentielle admet une solution particulière y_P de la forme :

$$y_P(x) = \begin{cases} ae^{mx} \text{ si } m \text{ n'est pas solution de l'équation caractéristique} \\ axe^{mx} \text{ si } m \text{ est solution simple de l'équation caractéristique} \\ ax^2e^{mx} \text{ si } m \text{ est solution double de l'équation caractéristique} \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{C}$.

REMARQUE : Si l'équation différentielle linéaire est d'ordre 1, le troisième cas est impossible.

Pour déterminer une solution particulière de $ay'' + by' + cy = \alpha\cos(\omega x)$ (ou $ay'' + by' + cy = \alpha\sin(\omega x)$), avec a, b, c, α et ω des nombres réels,

- On cherche une solution particulière y_P de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \alpha e^{iwx}$ à l'aide de la technique vue précédemment.
- On met cette dernière sous forme algébrique, c'est à dire on cherche y_1 et y_2 tels que : $y_P(x) = y_1(x) + iy_2(x)$.
- Alors y_1 est solution de $ay'' + by' + cy = \alpha\cos(\omega x)$ et y_2 est solution de $ay'' + by' + cy = \alpha\sin(\omega x)$.

Proposition 8

Soit

$$(\mathrm{E})\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Si y_1 est solution de :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g_1(x)$$

et y_2 de :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g_2(x),$$

alors $y_1 + y_2$ est solution de (E).

REMARQUE : Un tel principe se généralise aisément au cas d'un second membre de la forme :

$$g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x).$$

Exercice 3

- (Q 1) $y'' - y = 1$
- (Q 2) $y'' - y = \cos(2x)$
- (Q 3) $y'' - y = e^x$
- (Q 4) $y'' + y = \cos(x)$

Plan

Définition 5:

On appelle problème de Cauchy :

1. associé à l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants : $ay' + by = g(x)$, avec $a \neq 0$ le système :
$$\begin{cases} ay' + by = g(x) \\ y(x_0) = m_0 \end{cases} ;$$
2. associé à l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $ay'' + by' + cy = g(x)$, avec $a \neq 0$ le système :
$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = g(x) \\ y(x_0) = m_0 \\ y'(x_0) = v_0 \end{cases} ,$$

où x_0,m_0 et v_0 sont donnés.

Proposition 9(unicité du problème de Cauchy)

Quelles que soient les conditions initiales, les problèmes de Cauchy associés aux équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 ou 2 admettent une unique solution.

Exercice 4

Résoudre : $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$