Dimension d'un espace vectoriel

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Simplifier l'étude de bases à l'aide de l'outil « dimension » ;
- M2 Simplifier l'étude d'égalité d'espaces vectoriels à l'aide de l'outil « dimension » ;
- M3 Calculer la dimension d'un sous-espace vectoriel ;
- M4 Calculer le rang d'une famille de vecteurs ;
- M5 Simplifier l'étude de supplémentaires à l'aide de l'outil « dimension » ;
- M6 Résoudre des problèmes d'algèbre linéaire en dimension finie dans d'autres espaces que $\mathbb{K}^n$.

On note dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Plan

1. Espaces vectoriels de dimension finie
   - Définition et premières propriétés
   - Dimension d'un espace vectoriel
   - Bases en dimension finie
   - Les exercices du jour
2. Sous-espaces vectoriels en dimension finie
3. Polynômes et algèbre linéaire

Définition 1:

Soit $(E;+;.)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel non nul. On dit que E est de dimension finie lorsque E possède une famille **génératrice finie**.

Théorème 1

Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de $(E; +; .)$ avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.

- (théorème de la base incomplète) Si $\mathcal{L}$ une famille libre finie, alors $\mathcal{L}$ peut être complétée, à l'aide des éléments de $\mathcal{G}$, en une base de E.
- (théorème de la base extraite) On peut extraire des éléments de $\mathcal{G}$ de façon à former une base de E.

conséquence :

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie admet au moins une base. En effet, E admet une famille génératrice finie par définition dont on peut extraire des éléments de façon à former une base.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie.

➪ Résultat fondamental :

Proposition 1

Soit $\mathcal{G} = (g_1; \cdots; g_n)$ une famille génératrice de E et $\mathcal{L} = (l_1; \cdots; l_p)$. Si $\mathcal{L}$ est libre, alors $\boxed{p \leq n}$. Autrement dit, si $p > n$ alors la famille est liée.

conséquence :

Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. En effet, si l'on note $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E (donc des familles à la fois libres et génératrices par définition d'une base), alors :

- Puisque $\mathcal{B}_1$ est libre et $\mathcal{B}_2$ est génératrice, le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_1$ est plus petit que le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_2$ d'après le résultat ci-dessus.
- Puisque $\mathcal{B}_2$ est libre et $\mathcal{B}_1$ est génératrice, le nombre d'éléments de $\mathcal{B}_2$ est plus petit que le nombre d'éléménets de $\mathcal{B}_1$ d'après le résultat ci-dessus.

Les deux points nous permettent donc d'affirmer que les deux bases ont le même nombre d'éléments.

➪ Définition de la dimension :

Définition 2:

- On appelle dimension de E et non note $\dim(E)$ le nombre d'éléments d'une base quelconque de E.
- Si $\dim(E) = 1$ on dit que E est une droite vectorielle, et si $\dim(E) = 2$ on dit que c'est un plan vectoriel.
- Par convention, on dit que l'espace vectoriel nul est de dimension nulle : $\dim(\{0\}) = 0$.

Pour calculer la dimension d'un espace vectoriel E, il suffit donc de déterminer une base de E et de compter son nombre d'éléments !

REMARQUES :

1. La notion de dimension d'un espace vectoriel est donc au fond la même chose que ce que l'on appellait « degrés de liberté ».
2. L'espace vectoriel des suites d'élémentsde $\mathbb{K}$ est en revanche de dimension infinie. De même, pour $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

➪ Familles libres et génératrices en dimension finie :

Proposition 2

Si E est dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, alors :

- toute famille génératrice de E a au moins n vecteurs,
- toute famille libre de E a au plus n vecteurs.

Théorème 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E ;

(ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre ;

(iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

Pour résumer :

- Une famille libre a toujours moins de n éléments et une famille libre ayant n éléments (on dit « famille libre de taille maximale ») est automatiquement une base !
- Une famille génératrice a toujours plus de n éléments et une famille génératrice ayant n éléments (on dit « famille génératrice de taille minimale ») est automatiquement une base !

REMARQUE : Dans la suite du cours, on notera $\mathrm{Card}(\mathcal{F})$ le nombre d'éléments de la famille $\mathcal{F}$.

Exercice 1

[-M 1-] Montrer que la famille :
$\mathcal{B} = \Big((1;1;1;1);(1;0;1;1);(1;2;0;0);(1;2;3;4)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Plan

1. Espaces vectoriels de dimension finie
2. Sous-espaces vectoriels en dimension finie
   - Généralités
   - Rang d'une famille de vecteurs.
   - Somme et supplémentaires en dimension finie
   - Les exercices du jour
3. Polynômes et algèbre linéaire

Proposition 3

Si F est un sous-espace vectoriel de E. Alors :

1. F est un espace vectoriel de dimension finie, et $\dim(F) \leq \dim(E)$;
2. Si de plus $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$;

conséquence :

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie et tels que $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$. Alors $F = G$.

➪ Définition et premières propriétés :

Définition 3:

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs. On appelle rang de $\mathcal{F}$, et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(u_1, \ldots, u_p)$: $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\mathrm{vect}(u_1, \ldots, u_p))$.

On ne calcule pas le rang de d'une famille $\mathcal{F}$ en comptant le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$!

Proposition 4

Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Alors :

1. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$ avec égalité si et seulement si la famille est génératrice de E.
2. $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{F})$ avec égalité si et seulement si la famille est libre.

REMARQUE : Ainsi, une famille est libre si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F})$.

Proposition 5

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux familles de vecteurs de E telles que $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}') \leq \mathrm{rg}(\mathcal{F})$.

conséquence :

Si $\mathcal{F}$ contient une famille libre $\mathcal{F}'$ constituée de p éléments, alors $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) \geq p$.
En effet $\mathrm{rg}(\mathcal{F}') \leq \mathrm{rg}(\mathcal{F})$ et $\mathrm{rg}(\mathcal{F}') = p$ car $\mathcal{F}'$ est libre.

➪ Premières propriétés :

Proposition 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G supplémentaire de E, i.e., tel que $E = F \oplus G$.
2. Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E, soit $(u_1 ... u_m)$ une base de F, $(v_1 ... v_p)$ une base de G. Alors la famille $B = (u_1, ..., u_m, v_1 ..., v_p)$ est une base de E.

REMARQUE : Dans le deuxième point, la base obtenue de E obtenue en concaténant les éléments des deux bases précédentes est appelée base adaptée aux espaces supplémentaires.

conséquence :

Puisque $(u_1, ..., u_m, v_1 ..., v_p)$ est une base de E, on en déduit $\dim(E) = m + p$. Or $m = \dim(F)$ car $(u_1, \ldots, u_m)$ est une base de F et $\dim(G) = p$ car $(v_1, \ \ldots, v_p)$ est une base de G. Au final :

$$\boxed{\text{Si } E = F \oplus G \text{ alors } \dim(E) = \dim(F) + \dim(G).}$$

La formule précédente se généralise, il s'agit de la formule de Grassmann ci-après.

➪ Formule de Grassmann et caractérisation des supplémentaires :

Proposition 7 Formule de Grassmann

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

REMARQUE : On ne peut s'empêcher en observant cette formule de faire l'analogie avec $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$ lorsque A et B sont des sous-ensembles d'un ensemble fini...

Théorème 3 (Caractérisation des espaces supplémentaires grâce à la théorie de la dimension)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = F \oplus G$

(ii) $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

(iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

Exercice 2

[-M 3-] On note F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0 \right\} \text{ et}$$

$$G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Calculer $\dim(F)$, $\dim(G)$ et $\dim(F \cap G)$.

Exercice 3

[-M 2-] Montrer que :
$\mathrm{Vect}\Big((1;1;3);(2;-2;1)\Big) = \mathrm{Vect}\Big((1;-3;-2);(1;5;8)\Big)$.

Exercice 4

[-M 3-] Soit $A = \{\begin{pmatrix} a & 2a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que A est un espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et donner $\dim(A)$.

Exercice 5

[-M 3-] Soit F l'ensemble des solutions de l'équation $y' + y = 0$. Montrer que F, muni des lois de compositions internes et externes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, est un espace vectoriel de dimension finie et calculer sa dimension.

Exercice 6

[-M 4-] Soit $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer le rang de chacune des familles suivantes :

1. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \right)$
2. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \right)$
3. $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ; \right)$.

Exercice 7

[-M 4-] Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \sin kx \quad \text{et} \quad g_k(x) = \cos kx.$$

Déterminer le rang des familles

- Q 1 $\mathcal{F} = (f_1,\, f_2,\, f_3)$
- Q 2 $\mathcal{H} = (g_0, f_1^2, g_2)$

Exercice 8

[-M 5-] Soit $F = \mathrm{Vect}\Big((0;0;1;0);(1;0;2;0)\Big)$ et $G = \mathrm{Vect}\Big((0;1;0;1),(1;2;3;4)\Big)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
2. Donner alors la décomposition de $(x;y;z;t)$ dans $F+G$.

Plan

1. Espaces vectoriels de dimension finie
2. Sous-espaces vectoriels en dimension finie
3. Polynômes et algèbre linéaire
   - Structure d'espace vectoriel
   - Famille de polynômes libre
   - Base de $\mathbb{K}_n[X]$
   - Les exercices du jour

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On remarque que :

- la somme de polynômes est encore un polynôme ;
- la multiplication d'un polynôme par un scalaire est encore un polynôme.

Proposition 8

$(\mathbb{K}[X]; +; .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 4:

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

si $\deg(P) \leq n$ et si $\deg(Q) \leq n$, alors : $\deg(\lambda P + \mu Q) \leq n$, avec $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$ (cf. propriétés du degré d'un polynôme). Ceci veut dire que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire. Par ailleurs, le polynôme nul est bien de degré inférieur ou égal à n et donc est un élément de $\mathbb{K}_n[X]$. Les deux points précédents nous assurent donc que :

$$\boxed{\mathbb{K}_n[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}[X].}$$

Définition 5:

Soit $\mathcal{F} = (P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que $\mathcal{F}$ est de degrés échelonnés si les polynômes sont tous non nuls et : $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \ldots < \deg(P_n)$.

Proposition 9

Toute famille de polynômes **de degrés échelonnés** est libre.

Proposition 10

$\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ dont une base, dite canonique, est $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$. Par conséquent : $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$

$\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie !

Exercice 9

[-M 6-] Montrer que $\mathcal{F} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^3 dans $\mathcal{F}$.