À rendre le Mardi 13 Septembre

Devoir en temps libre n° 1

EXERCICE

On considère l'équation :

$$(\mathrm{E})\ x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0.$$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. Pour $x_0 \neq 0$, on pose : $u_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}$.
   (a) Calculer u_0^2, puis exprimer : $x_0^2 + 2x_0 - 1 + \frac{2}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}$ en fonction de u_0 uniquement.
   (b) En déduire que x_0 est solution de (E) si et seulement si u_0 est solution d'une équation de degré deux que l'on explicitera et que l'on résoudra.
   (c) En vous aidant des questions précédentes, résoudre (E).

PROBLÈME

On considère l'équation de paramètre réel m : $(\mathrm{E_m})\ \sqrt{x^2 + mx - 2} = 2x + 1$.

1. Pour quelles valeurs de x l'équation $(\mathrm{E_m})$ est-elle définie ?
2. Résoudre l'équation pour $m = -2$.
3. Résoudre l'équation de paramètre réel m : $3x^2 + (4 - m)x + 3 = 0$.
4. Résoudre les inéquations : $m - 1 \geq \sqrt{(m+2)(m-10)}$ puis $\sqrt{(m+2)(m-10)} \geq 1 - m$.
5. En vous aidant des questions précédentes, en déduire le nombre et l'expression des solutions de $(\mathrm{E_m})$ suivant les valeurs de m.

Exercice 1:

1. Pour $x = 0$, nous avons $x^3 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 1$. Ceci est différent de 0 donc $\boxed{0 \text{ n'est pas solution de (E).}}$

2. (a) • Nous avons : $u_0^2 = \left(x_0 + \dfrac{1}{x_0}\right)^2 = x_0^2 + 2\cancel{x_0} \times \dfrac{1}{\cancel{x_0}} + \dfrac{1}{x_0^2} = \boxed{x_0^2 + 2 + \dfrac{1}{x_0^2}.}$

• D'après ci-dessus, $u_0^2 = x_0^2 + 2 + \dfrac{1}{x_0^2} \Leftrightarrow x_0^2 + \dfrac{1}{x_0^2} = u_0^2 - 2$. Ainsi :

$$x_0^2 + 2x_0 - 1 + \tfrac{2}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = \underbrace{x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}}_{u_0^2-2} + 2\underbrace{\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)}_{=u_0} - 1 = \boxed{u_0^2 + 2u_0 - 3.}$$

(b) x_0 est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_0^4 + 2x_0^3 - x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_0^2\left(x_0^2 + 2x_0 - 1 + \dfrac{2}{x_0} + \dfrac{1}{x_0^2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \neq 0 \\ x_0^2 + 2x_0 - 1 + \dfrac{2}{x_0} + \dfrac{1}{x_0^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{u_0^2 + 2u_0 - 3 = 0.}$$

(c) Or, le trinôme $X^2 + 2X - 3 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 16$. Il a donc deux solutions distinctes : $X_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$, $x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$. Ainsi :

$$\begin{array}{lll} & u_0 = -3 & \text{ou } u_0 = 1 \\ \Leftrightarrow & x_0 + \dfrac{1}{x_0} = -3 & \text{ou } x_0 + \dfrac{1}{x_0} = 1 \\ \Leftrightarrow & x_0 + \dfrac{1}{x_0} + 3 = 0 & \text{ou } x_0 + \dfrac{1}{x_0} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \dfrac{x_0^2 + 1 + 3x_0}{x_0} = 0 & \text{ou } \dfrac{x_0^2 + 1 - x_0}{x_0} = 0 \\ \Leftrightarrow & x_0^2 + 3x_0 + 1 = 0 & \text{ou } x_0^2 - x_0 + 1 = 0 \end{array}$$

Enfin, le trinôme $X^2 + 3X + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 5$, il a donc pour racines : $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$. D'autre part, le trinôme $X^2 - X + 1$ a un discriminant strictement négatif donc n'admet pas de racines réelles.

BILAN : x_0 est solution de (E) si et seulement si $x_0 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ou $x_0 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$. $\boxed{S = \left\{\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}.}$

Problème :

1. L'équation est définie si et seulement si $x^2 + mx - 2 \geq 0$. Or ce trinôme a pour discriminant $\Delta = m^2 + 8$, donc $\Delta > 0$ car $\forall m \in \mathbb{R}, m^2 \geq 0$. Nous avons donc deux racines réelles distinctes : $\boxed{y_1 = \dfrac{-m - \sqrt{m^2+8}}{2},\ y_2 = \dfrac{-m + \sqrt{m^2+8}}{2}}$ (avec $y_1 \leq y_2$). Ce trinôme a de plus un coefficient dominant strictement positif, donc l'équation est définie sur $\boxed{]-\infty;\ y_1[\cup[y_2;\ +\infty[.}$

2. On peut procéder par exemple par analyse synthèse :
   - **Analyse :** $\sqrt{x^2 - 2x - 2} = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0$. Or, ce trinôme a un discriminant nul donc admet une unique racine réelle, à savoir -1.
   - **Synthèse :** On vérifie que -1 n'est pas solution de $\sqrt{x^2 - 2x - 2} = 2x + 1$.
   - **Bilan :** $\boxed{S = \emptyset.}$

3. Il s'agit d'un trinôme de discriminant : $\Delta = (4-m)^2 - 36 = (-2-m)(10-m) = (m+2)(m-10)$. Le signe du trinôme s'obtient à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty \quad -2 \quad 10 \quad +\infty$
$m+2$	$- \; 0 \; + \quad +$
$m-10$	$- \quad - \; 0 \; +$
$(m+2)(m-10)$	$+ \; 0 \; - \; 0 \; +$

On en déduit les trois situations suivantes :

- $m \in]-2;\ 10[\Leftrightarrow \Delta = 0$: $\boxed{S = \emptyset.}$
- $m = -2$ ou $m = 10$, nous obtenons une unique solution : $x_0 = \dfrac{m-4}{6}$: $\boxed{S = \dfrac{m-4}{6}.}$
- $m \in]-\infty;\ -2[\cup]10;\ +\infty[\Leftrightarrow \Delta > 0$. Nous avons donc deux solutions réelles distinctes : $\boxed{x_1 = \dfrac{m-4-\sqrt{(m+2)(m-10)}}{6};\quad x_2 = \dfrac{m-4+\sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}.}$

  Ainsi : $\boxed{S = \{x_1;\ x_2\}.}$

4. — Résolution de (*) : $m - 1 \geq \sqrt{(m+2)(m-10)}$.
   D'après l'étude menée à la question précédente, cette inéquation a un sens si et seulement si $m \in]-\infty;\ -2] \cup [10;\ +\infty[$. On poursuit la résolution en distinguant deux cas :

   - **Cas 1 :** $m < 1 \Leftrightarrow m - 1 < 0$. Alors l'inégalité $m - 1 \geq \sqrt{(m+2)(m-10)}$ est impossible car la racine d'un nombre est toujours positive.
   - **Cas 2 :** $m \geq 1 \Leftrightarrow m - 1 \geq 0$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons :
   $$\begin{aligned} m-1 \geq \sqrt{(m+2)(m-10)} \quad &\Leftrightarrow (m-1)^2 \geq (m+2)(m-10) \\ &\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 \geq m^2 - 8m - 20 \\ &\Leftrightarrow 6m \geq -21 \\ &\Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$
     Ainsi, dans ce cas, il nous faut : $m \in]-\infty;\ -2] \cup [10;\ +\infty[\cap[1;\ +\infty[\cap\left[-\dfrac{7}{2};\ +\infty\right[= [10;\ +\infty[$.

   Le premier cas n'ayant pas de solutions, au final : $\boxed{S = [10;\ +\infty[.}$

   — Résolution de (*) : $\sqrt{(m+2)(m-10)} \geq 1 - m$.
   De la même façon, cette inéquation a un sens si et seulement si $m \in]-\infty;\ -2] \cup [10;\ +\infty[$. On poursuit la résulution en distinguant deux cas :

   - **Cas 1 :** $m > 1 \Leftrightarrow 1 - m < 0$. Alors l'inégalité $\sqrt{(m+2)(m-10)} \geq 1 - m$ est toujours vérifiée car la racine d'un nombre est toujours positive. Dans ce cas-ci, il nous faut donc : $x \in]-\infty;\ -2] \cup [10;\ +\infty[\cap]1;\ +\infty[=][10;\ +\infty[$.
   - **Cas 2 :** $m \leq 1 \Leftrightarrow 1 - m \geq 0$. Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons :
   $$\begin{aligned} \sqrt{(m+2)(m-10)} \geq 1 - m \quad &\Leftrightarrow (m+2)(m-10) \geq (1-m)^2 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 8m - 20 \geq m^2 - 2m + 1 \\ &\Leftrightarrow 6m \leq -21 \\ &\Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$
     Ainsi, dans ce cas, il nous faut : $m \in]-\infty;\ -2] \cup [10;\ +\infty[\cap[-\infty;\ 1[\cap\left[-\infty; -\dfrac{7}{2}\right] = \left]-\infty;\ -\dfrac{7}{2}\right]$.

   Au final : $x \in \left]-\infty;\ -\dfrac{7}{2}\right] \cup [10;\ +\infty[$. $\boxed{S = \left]-\infty;\ -\dfrac{7}{2}\right] \cup [10;\ +\infty[.}$

5. Dans un premier temps :
$$\sqrt{x^2 + mx - 2} = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx - 2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + (4-m)x + 3 = 0 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$
   D'après la question 3 et la question 1, nous pouvons alors distinguer quatre cas :

   - **Cas 1 :** $\underline{m \in]-2;\ 10[}$ auquel cas : $3x^2 + (4-m)x + 3 = 0$ est impossible, ce qui prouve que l'équation : $\sqrt{x^2 + mx - 2} = 2x + 1$ est impossible : $\boxed{S = \emptyset.}$

- **Cas 2 :** $\underline{m=-2}$, nous avons obtenu : $\boxed{S=\emptyset}$ en question 2.
- **Cas 3 :** $\underline{m=10}$. Alors :

$$\sqrt{x^2+mx-2}=2x+1 \quad\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+3=0 \\ x\geq -\frac{1}{2}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Par conséquent : $\boxed{S=\{1\}.}$

- **Cas 4 :** $\underline{m\in]-\infty;\ -2[\cup]10;\ +\infty[}$. Alors, d'après la question 3 :

$$\sqrt{x^2+mx-2}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{m-4-\sqrt{(m+2)(m-10)}}{6} \text{ ou } \dfrac{m-4+\sqrt{(m+2)(m-10)}}{6} \\ x\geq -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

D'autre part :

$$\frac{m-4-\sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}\geq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow m-4-\sqrt{(m+2)(m-10)}\geq -3$$
$$\Leftrightarrow m-1\geq \sqrt{(m+2)(m-10)}$$
$$\Leftrightarrow m\in[10;\ +\infty[\text{ D'après 4}$$

De la même façon :

$$\frac{m-4+\sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}\geq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow m-4+\sqrt{(m+2)(m-10)}\geq -3$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(m+2)(m-10)}\geq 1-m$$
$$\Leftrightarrow m\in\left]-\infty;\ -\frac{7}{2}\right]\cup[10;\ +\infty[\text{ D'après 4}$$

Nous distinguons donc au final les situations suivantes :

— $m\in\left]-\frac{7}{2};\ -2\right[$, nous n'avons pas de solution : $\boxed{S=\emptyset.}$

— $m\in]10;\ +\infty[$, nous avons <u>deux solutions potentielles</u> :

$$\boxed{x_1=\frac{m-4-\sqrt{(m+2)(m-10)}}{6};x_{=}2\frac{m-4+\sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}}.$$

On vérifie par ailleurs que : $\boxed{y_2\leq x_1\leq x_2}$ ($x_1\leq x_2$ est évident). En effet :

$y_2\leq x_1 \quad\Leftrightarrow 3\sqrt{m^2+8}+\sqrt{m^2-8m-20}\leq 4m-4)$.

Or :

$$3\sqrt{m^2+8}+\sqrt{m^2-8m-20}\leq 4(m-1)$$
$$\Leftrightarrow\quad 9(m^2+8)+6\sqrt{(m^2+8)(m^2-8m-20)}+m^2-8m-20\leq 16m^2-32m+16$$
$$\text{car } 4(m-1)\geq 0 \text{ pour } m\geq 10$$
$$\Leftrightarrow\quad \sqrt{(m^2+8)(m^2-8m-20)}\leq m^2-4m-6.$$

L'étude du signe du trinôme m^2-4m-6 conduit à sa positivité si et seulement si $m\in]-\infty;\ 2-\sqrt{10}]\cup[2+\sqrt{10};\ +\infty[$. Or $10>2+\sqrt{10}$ et $m\geq 10$ donc $m\in[2+\sqrt{10};\ +\infty[$, et donc $m^2-4m-6\geq 0$. On peut donc encore élever au carré, ce qui conduit à :

$$\sqrt{m^2+8}+\sqrt{m^2-8m-20}\leq 4(m-1)$$
$$\Leftrightarrow\quad m^4-8m^3-12m^2-64m-160\leq m^4-8m^3+4m^2+48m+36$$
$$\Leftrightarrow\quad 4m^2+28m+49\geq 0$$
$$\Leftrightarrow\quad (2m+7)^2\geq 0$$

La dernière éaglité étant forcément satisfaite puisqu'un carré est toujours positif, on en déduit que l'inégalité $\sqrt{m^2+8}+\sqrt{m^2-8m-20}\leq 4(m-1)$ est toujours vérifiée, ce qui prouve que $y_2\leq x_1$, et donc que les solutions précédemment trouvées appartiennent bien au domaine de définition de l'équation ($\mathrm{E_m}$) ce qui prouve que $\boxed{S=\{x_1;\ x_2\}.}$

— $m\in\left]-\infty;\ -\frac{7}{2}\right]$, nous avons une <u>unique solution potentielle</u> :

$$\boxed{x_2=\frac{m-4+\sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}}.$$

On vérifie par ailleurs que $\boxed{x_2\leq y_1}$. En effet,

$$x_2\leq y_1$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{m-4+\sqrt{(m+2)(m-10)}}{6}\leq\frac{-m-\sqrt{m^2+8}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\quad 3\sqrt{m^2+8}+\sqrt{(m+2)(m-10)}\leq 4(1-m).$$

En constatant que $4(1-m)>0$ pour les valeurs de m considérées dans cette situation, nous pouvons alors élever au carré tout en préservant l'équivalence, ce qui nous conduit aux calculs ci-dessus. Nous avons à nouveau que le trinôme m^2-4m-6 est positif pour les valeurs de m considérées, nous pouvons à nousveau élever au carré. Bref, de la même façon :

$3\sqrt{m^2+8}+\sqrt{(m+2)(m-10)} \leq 4(1-m) \Leftrightarrow (2m+7)^2 \geq 0$. La dernière égalité étant toujours vraie, nous avons donc prouvé : $x_2 \leq y_1$ et donc que la solutions x_2 appartient bien au domaine de définition de l'équation $(\mathrm{E_m})$ ce qui prouve que $\boxed{S = \{\ x_2\}.}$