Développements limités

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- M1 Savoir comparer des suites ou fonctions au voisinage d'un point.
- M2 Connaître les théorèmes généraux sur les développements limités usuels.
- M3 Savoir calculer le développement limité en un point à un ordre fixé par opérations usuelles.

<u>But :</u> Approximation <u>locale</u> d'une fonction par une fonction polynômiale.
Notations : On note, sauf mentions contraires :

- f une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$;
- I un intervalle (de longueur non nulle) inclus dans D ;
- x_0 un point de I ou une borne finie de I (exemple : $I =]0;\ +\infty[$ et $x_0 = 0$) ;
- $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty;\ -\infty\}$.

Plan

Définition 1:

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a sauf éventuellement en a.

1. On dit que f est dominée par g au voisinage de a et on note $f = \underset{a}{O}(g)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ si
   1. g ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a
   2. $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
2. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f = \underset{a}{o}(g)$ ou $f(x) =_{x\to a} o(g(x))$ si
   1. g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut être en a
   2. $\lim_a \frac{f}{g} = 0$.

REMARQUES :

1. Si $f = o_a(g)$, alors $f = O_a(g)$;
2. $f = O_a(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a ;
3. $f = o_a(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Proposition 1

1. Si $f = o_a(g)$ et g est bornée sur un voisinage de a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$;
2. Si $f = O_a(g)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Proposition 2

Les opérations usuelles sont les suivantes :

- **(transitivité) :** Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$ (de même pour O) ;
- **(multiplication par un réel) :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, si $f = o_a(g)$, alors $\lambda f = o_a(g)$ (de même pour O) ;
- **(multiplication par une fonction) :** Si $f = o_a(g)$, alors $fh = o_a(gh)$ (de même pour O) ;
- **(produit) :** Si $f = o_a(h_1)$ et $g = o_a(h_2)$, alors $fg = o_a(h_1 h_2)$ (de même pour O) ;
- **(puissance) :** Si au voisinage de a, $f > 0$, $g > 0$ et $f = o_a(g)$, alors pour tout $\alpha > 0$, $f^\alpha = o_a\left(g^\alpha\right)$ (de même pour O) ;
- **(somme) :** Si $\left.\begin{array}{c} f = o_a(h) \\ g = o_a(h) \end{array}\right\}$, alors $f + g = o_a(h)$ (de même pour O).

REMARQUE : Les opérations précédentes peuvent se réécrire sous les formes suivantes :

- « $o_a(o_a(h)) = o_a(h)$ »(transitivité) ;
- « $\lambda o_a(g) = o_a(g)$ »(multiplication par un réel) ;
- « $h o_a(g) = o_a(hg)$ »(multiplication par une fonction) ;
- « $o_a(h_1) o_a(h_2) = o_a(h_1 h_2)$ »(produit) ;
- « $o_a(g)^\alpha = o_a(g^\alpha)$ »(puissance α) ;
- « $o_a(h) + o_a(h) = o_a(h)$ »(somme).

1. Pour la somme, les deux fonctions doivent être comparées à une même fonction. Par exemple, $1 = o_{+\infty}(x)$, $2 = o_{+\infty}(x+1)$ mais $\underbrace{2-1}_{=1}$ n'est pas négligeable en $+\infty$ devant $\underbrace{(x+1)-x}_{=1}$;
2. Nous avons : $o_a(f) - o_a(f) = o_a(f)$! !

⇨ Cas des fonctions :

Proposition 3

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Alors :

1. $(\ln x)^\beta = o_{+\infty}(x^\alpha)$;
2. $|\ln x|^\beta = o_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$;
3. $x^\alpha = o_{+\infty}\left(e^{\beta x}\right)$;
4. $e^{\beta x} = o_{-\infty}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$.

REMARQUE : Il s'agit d'une réécriture des croissances comparées vues en début d'année.

➩ Cas des suites :

Proposition 4

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a > 1$. Alors :

1. $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$;
2. $n^\alpha = o(a^n)$;
3. $a^n = o(n!)$;
4. $n! = o(n^n)$.

REMARQUES :

1. 1. et 2. sont des réécritures des croissances comparées vues en cours.
2. En notation de Hardy, le résultat précédent s'écrit de façon plus condensée :

$$(\ln n)^\beta << n^\alpha << a^n << n! << n^n.$$

Exercice 1

[M1] Classer les suites suivantes :
$(n!)_{n\geq 1}, (\ln^2(n))_{n\geq 1}, (n^6)_{n\geq 1}, (3^n)_{n\geq 1}, ((1/2)^n)), (n^n)_{n\geq 1}$.

Plan

⇨ Développement limité en 0 :

Définition 2:

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 (on écrit $DL_n(0)$) lorsqu'il existe des réels $a_0, ..., a_n$ et un voisinage $V(0)$ de 0 tels que $\forall x \in D \cap V(0)$:

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o_0(x^n)$$

➩ Développement limité en $x_0 \in \mathbb{R}$:

Définition 3:

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, et on écrit $DL_n(x_0)$, si et seulement s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$, un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tels que, $\forall x \in D \cap V(x_0)$:

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o_{x_0}((x - x_0)^n)$$

REMARQUES :

- **On doit donc exprimer suivant les puissances croissantes de $(x - x_0)^k$ et non celles de x^k.**
- L'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ est appelée partie principale du développement limité.

Proposition 5

1. Si f admet un $DL_n(x_0)$, alors les coefficients a_0, a_1,..., a_n sont uniques ;
2. Si f admet pour $DL_n(x_0)$:

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

alors pour $m \leq n$, f admet un $DL_m(x_0)$. De plus, le $DL_m(x_0)$ est obtenu en tronquant la partie principale du $DL_n(x_0)$ au degré m.

conséquence :

Soit f admettant un $DL_n(0)$.

1. Si f est paire, alors le développement limité ne fait intervenir que des puissances paires.
2. Si f est impaire, alors le développement limité ne fait intervenir que des puissances impaires.

La réciproque est fausse. $f(x) = 1 + x^2 + x^3\cos(x)$ a pour $DL_2(0)$: $f(x) = 1+x^2+o_0(x^2)$. Pourtant, f n'est pas paire. Plus généralement, il est rare qu'une information locale (développement limité en un point) entraîne une information globale (parité d'une fonction).

Théorème 1Formule de Taylor-Young

Soit f une fonction de classe C^n sur I et $x_0 \in I$. Alors f admet un $DL_n(x_0)$:

$$\forall x \in I,\ f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^n).$$

REMARQUE : En $x_0 = 0$, elle s'écrit :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o_0(x^n)$$

Exemple :$DL_3(0)$ *de* $\tan$
Puisque : $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, $\tan''(x) = 2\tan(x) + 2\tan^3(x)$,
$\tan^{(3)}(x) = 2(1+\tan^2(x)) + 6(1+\tan^2(x))\tan^2(x)$ on en déduit : $\tan'(0) = 1$, $\tan''(0) = 0$
et $\tan^{(3)}(0) = 2$ d'où : $\boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3).}$

Proposition 6

Soient :

- f une fonction continue sur D,
- $x_0 \in D$ tel que f ait un $DL_n(x_0)$ de la forme :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

alors : $g(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ admet un $DL_{n+1}(x_0)$ dont la partie principale est obtenue en intégrant la partie principale du $DL_n(x_0)$ de f :

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \underset{x \to x_0}{=} a_0(x-x_0)+\frac{a_1}{2}(x-x_0)^2+...+\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+o_{x_0}((x-x_0)^{n}$$

Exercice 2

[M2] On pose $f(x) = \ln(\cos(x))$. Calculer $f'(x)$ puis déterminer le développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

Plan

Proposition 7

pour tout entier naturel n, f admet un $DL_n(0)$. Au voisinage de 0, on a :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)}.$$

conséquences :

- $\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o_0(x^n)}$;
- $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o_0(x^n)}$;
- $\boxed{\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o_0(x^{2n+1}).}$

Proposition 8

$\exp$ admet un développement limité à tout ordre en 0. De plus :

$$\exp(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_0(x^n)$$

Proposition 9

$\cos$, $\sin$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et admettent des DL en 0 à tout ordre. Pour x appartenant à un voisinage de 0 :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o_0(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o_0(x^{2n+2})$$

Proposition 10

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\begin{array}{ccc}]-1;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (1+x)^\alpha \end{array}$ est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$ et admet un développement limité en 0 à tout ordre. De plus :

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_0(x^n).$$

Plan

Proposition 11

Si f et g admettent des $DL_n(x_0)$, alors pour $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(x_0)$. Plus précisément, si

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P_n(x) + o_{x_0}((x - x_0)^n) \text{ et } g(x) \underset{x \to x_0}{=} Q_n(x) + o_{x_0}((x - x_0)^n),$$

avec P_n, Q_n polynômes de degré n, alors :

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{x \to x_0}{=} \lambda P_n(x) + \mu Q_n(x) + o_{x_0}((x - x_0)^n).$$

Proposition 12

Si f et g admettent des $DL_n(x_0)$, alors fg admet un $DL_n(x_0)$. Plus précisément, si

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P_n(x) + o((x - x_0)^n) \text{ et } g(x) \underset{x \to x_0}{=} Q_n(x) + o((x - x_0)^n),$$

avec P_n, Q_n polynômes de degré n , alors :

$$f(x)g(x) \underset{x \to x_0}{=} R_n(x) + o((x - x_0)^n),$$

où R_n est la partie tronquée d'ordre n du polynôme P_nQ_n.

Proposition 13

Si f admet un $DL_n(x_0)$: $f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}((x - x_0)^n)$ et g admet un $DL_n(a_0)$, alors $g \circ f$ admet un $DL_n(x_0)$.

Proposition 14

Si f et g admettent des $DL_n(x_0)$, et $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ admet un $DL_n(x_0)$.

Exercice 3

[M3] Déterminer le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1-x} - e^{-x}$.

Exercice 4

[M3] Déterminer : le $DL_3(0)$ de $2\sin(x) + 3\cos(x)$

Exercice 5

[M3] Déterminer :

a) le $DL_2(0)$ de $\dfrac{\cos(x)}{1-x}$

b) le $DL_3(0)$ de $e^x \times \sin(x)$.

c) le $DL_4(0)$ de $(1+x)\ln(1+x)$.

d) le $DL_4(0)$ de $\sqrt{1+x} \times \sin(x)$.

Exercice 6

[M3]

- (Q 1) Déterminer le $DL_4(0)$ de $\exp(x/(1+x))$.
- (Q 2) Déterminer le $DL_4(0)$ de $\ln(\cos(x))$ en effectuant une composition cette fois.

Exercice 7

[M3] Déterminer les développements limités suivants :

(a) $DL_3(0)$ de $\dfrac{1}{2+\sin(x)}$ (b)$DL_5(0)$ de $\tan(x)$ en tant que quotient.