Chapitre 15

Dérivabilité et régularités d'ordres supérieurs

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Étudier la dérivabilité ainsi que les régularités d'ordres supérieurs en un point ;
- M2 Utiliser le théorème de Rolle, les accroissements finis ;
- M3 Effectuer des calculs de dérivées n-ièmes de fonctions.

Notations : Sauf mentions contraires :

- Toutes les fonctions considérées sont définies sur un ensemble D ;
- Le réel x_0 appartient à l'intérieur d'un intervalle I inclus dans D.

Plan

1. Généralités sur les fonctions dérivables
   - Dérivabilité, dérivabilité à droite et à gauche
   - Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction dérivable
   - Dérivée et extrêma d'une fonction
2. Propriétés des fonctions dérivables
3. Fonctions de classe C^1
4. Dérivées successives et classes d'une fonction
5. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 1:

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque τ_{x_0} admet une limite finie en x_0. On note alors : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
2. On dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque τ_{x_0} admet une limite finie à droite en x_0. On note alors : $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
3. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 lorsque τ_{x_0} admet une limite finie à gauche en x_0. On note alors : $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Proposition 1

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 **ET** $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. Nous avons dans ce cas : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Proposition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $x_0 \in I$. Alors :

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Définition 2:

On dit que x_0 est

1. un **minimum local** lorsque l'inégalité : $f(x_0) \leq f(x)$ est vérifiée sur un voisinage de x_0 ;
2. un **maximum local** lorsque l'inégalité : $f(x) \leq f(x_0)$ est vérifiée sur un voisinage de x_0 ;
3. un **minimum global** lorsque l'inégalité : $f(x_0) \leq f(x)$ est vérifiée pour tout $x \in D$;
4. un **maximum global** lorsque l'inégalité : $f(x) \leq f(x_0)$ est vérifiée pour tout $x \in D$.

REMARQUEs :

1. Un extrêmum global est local, mais un extrêmum local n'est pas forcément global.
2. Le théorème de Weierstrass assure l'existence d'extrêma globaux pour des fonctions continues sur des intervalles fermés bornés.

Proposition 3

Si f est dérivable sur $]a;\ b[$ et admet un extrêmum local $c \in]a;\ b[$, alors $f'(c) = 0$.

1. On peut avoir $f'(c) = 0$ sans que c soit un extrêmum local. C'est par exemple le cas de 0 pour la fonction $f(x) = x^3$;
2. Le nombre dérivé d'un extrêmum local situé au bord du domaine de définition n'est pas forcément nul. C'est par exemple le cas de 0 et 1 pour la fonction $f(x) = x$ regardée sur $[0;\ 1]$.

Définition 3:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. On dit que $c \in I$ est un point critique pour f lorsque : $f'(c) = 0$.

Plan

1. Généralités sur les fonctions dérivables
2. Propriétés des fonctions dérivables
   - Théorème de Rolle
   - Les accroissements finis.
   - Théorème de la limite de la dérivée
   - Les exercices du jour
3. Fonctions de classe C^1
4. Dérivées successives et classes d'une fonction
5. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Théorème 1

Soit f une fonction :
- continue sur $[a;\ b]$;
- dérivable sur $]a;\ b[$;
- telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a;\ b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 2(égalité des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur $[a;\ b]$ et dérivable sur $]a;\ b[$. Alors il existe $c \in]a;\ b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

conséquence :

Soit I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et telle que : $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$. Alors f est croissante sur I.

Proposition 4(Inégalités des accroissements finis)

1. Soit f une fonction continue sur $[a;\ b]$, dérivable sur $]a;\ b[$ et telle que : $\forall t \in]a;\ b[,\ m \leq f'(t) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq M$, alors :

$$\forall (x;\ y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leq M|y-x|.$$

Théorème 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que :

1. f est continue sur I ;
2. f est dérivable sur $I - \{x_0\}$, $x_0 \in I$;
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$. Si de plus $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

Exercice 1

[M2] Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0, \\ ax + x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ À quelle condition sur a, la fonction f est-elle dérivable en 0?

Exercice 2

[M2]Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Est-elle continue en 0 ? dérivable en 0?

Exercice 3

[M2] On pose : $f(x) = (x-1)\text{Arcsin}(\sqrt{x})$ définie sur $[0;\ 1]$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;\ 1[$.
2. Montrer f' admet une limite finie en 1 que l'on précisera. f est-elle dérivable en 1 ?
3. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 4

[M2] Pour un entier naturel $n \geq 2$, montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n + ax + b$ admet au plus trois zéros réels. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 5

[M2] (application à l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n), u_0 \in \mathbb{R}$.) Soit $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, u_0 \geq -2$ .On admet que la suite est bien définie et que : $\forall n \geq 1; u_n \geq 0$.

1. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que
$$\forall x \geq 0; |f(x) - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - 2|.$$
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - 2|$ puis que :
$\forall n \geq 1; |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n-1}|u_1 - 2|$.
3. Conclure sur le comportement asymptotique de cette suite.

Plan

1. Généralités sur les fonctions dérivables
2. Propriétés des fonctions dérivables
3. Fonctions de classe C^1
   - Comparaison avec les fonction continues et dérivables
   - Prolongement de classe C^1 d'une fonction et limite de la dérivée
   - Les exercices du jour
4. Dérivées successives et classes d'une fonction
5. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 4:

On dit que f est de classe C^1 lorsque f est dérivable sur D et f' est continue sur D. On note $C^1(D;\ \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur D.

Proposition 5

$C^1(D;\ \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(D, \mathbb{R}) \subset C(D;\ \mathbb{R})$.

Les inclusions précédentes sont strictes, il existe en effet des fonctions continues et non dérivables en un point (par exemple la fonction valeur absolue en 0) ainsi que des fonctions dérivables en un point mais qui ne sont pas de classe C^1 en ce point.

Proposition 6

Si :
- f est continue sur I ;
- f est de classe C^1 sur $I - \{x_0\}$, alors f est de classe C^1 sur I.
- f' admet une limite finie en x_0

Exercice 6

[M1] Soit $\forall x \neq 0, f(x) = e^{-1/x^2}$. Montrer que f admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Exercice 7

[M1] On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f est-elle continue, dérivable, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?

Plan

1. Généralités sur les fonctions dérivables
2. Propriétés des fonctions dérivables
3. Fonctions de classe C^1
4. Dérivées successives et classes d'une fonction
   - Dérivées successives
   - Classes d'une fonction
   - Opérations usuelles
   - Formule de Leibniz
   - Les exercices du jour
5. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

On convient de noter $f^{(0)}$ pour f.

Définition 5:

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application. On définit les dérivées successives de f de proche en proche (c'est à dire par récurrence) par (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) :

- Pour $a \in D$, $f^{(n)}(a)$ est, si elle existe, la dérivée de $f^{(n-1)}$ en a ;
- $f^{(n)}$ l'application dérivée de $f^{(n-1)}$.

On appelle alors :

- dérivée n-ème de f en a l'élement $f^{(n)}(a)$;
- la dérivée n-ème de f en a l'application $x \mapsto f^{(n)}(x)$.

Définition 6:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit que f est n-fois dérivable sur D lorsque $f^{(n)}$ existe et est définie sur D ;
2. On dit que f est n-fois continûment dérivable (ou de classe $\mathcal{C}^n$) sur D si f est n-fois dérivable sur D et $f^{(n)}$ est continue.
3. On dit que f est indéfiniment dérivable (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur D lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n-fois dérivable sur D.

Notations : On note $\mathcal{D}^n(D)$ l'ensemble des fonctions n-fois dérivables, $C^n(D)$ l'ensemble des fonctions n-fois continûment dérivables et $C^\infty(D)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur D.

REMARQUE : Nous avons les inclusions (strictes) $\mathcal{C}^2(D) \subset \mathcal{D}^2(D) \subset \mathcal{C}^1(D)$.

Plus généralement :

Proposition 7

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^\infty(D) \subset \mathcal{C}^{n+1}(D) \subset \mathcal{D}^{n+1}(D) \subset \mathcal{C}^n(D)$.

Proposition 8

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

1. f est $n+1$ fois dérivable sur D si et seulement si f' est n fois dérivable sur D. Dans ce cas $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$;
2. f est de classe C^{n+1} sur D (resp. C^∞) si et seulement si f' est de classe C^n sur D (resp. C^∞).

⇨ Combinaison linéaire :

Proposition 9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables. Alors,

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda f + \mu g$ est n fois dérivable et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
2. Si de plus, f et g sont de classe C^n (resp C^∞) alors il en est de même de $\lambda f + \mu g$.

➪ Produit :

Proposition 10

1. Si f et g sont n-fois dérivables sur D, alors fg est n-fois dérivable sur D.
2. Si f et g sont de classe C^n sur D (resp. C^∞), alors fg est de classe C^n sur D (resp. C^∞).

⇨ Quotient :

Proposition 11

1. Si f et g sont n-fois dérivables sur D et g ne s'annule pas sur D, alors $\dfrac{f}{g}$ est n-fois dérivable sur D.
2. Si de plus f et g sont de classe C^n sur D (resp. $\mathcal{C}^\infty$), alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur D (resp. $\mathcal{C}^\infty$).

⇨ Composition :

Proposition 12

1. Soient g et g telles que : $D \xrightarrow{f} D' \xrightarrow{g} \mathbb{R}$. Si f est n fois dérivables sur D et g est n fois dérivable sur D' alors $g \circ f$ est n-fois dérivable sur D ;
2. Si de plus f et g sont de classe C^n (resp. $\mathcal{C}^\infty$), alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur D (resp. $\mathcal{C}^\infty$).

➪ Régularité de l'application réciproque :

Proposition 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est de classe C^n (resp. C^∞) sur I et $f' \neq 0$ sur I alors f^{-1} est de classe C^n (resp. C^∞) sur $J = f(I)$.

Proposition 14

Si f et g sont n-fois dérivable sur D, alors fg est n-fois dérivable sur D et pour tout $x \in D$:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Exercice 8

[M3] Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$ où P_n est une fonction polynômiale de degré n. Déterminer P_0, P_1 et donner une relation entre P_{n+1}, P_n et P'_n.

Exercice 9

[M3] On pose : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$. Montrer que f est de classe c^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et en vous aidant de la formule de Leibniz montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right) \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}.$$

Plan

1. Généralités sur les fonctions dérivables
2. Propriétés des fonctions dérivables
3. Fonctions de classe C^1
4. Dérivées successives et classes d'une fonction
5. Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

- Nous avons déjà défini dans un chapitre précédent les fonctions à valeurs complexes dérivables.
- On étend de la même manière la notion de dérivée k-ième et de fonction de classe $\mathcal{C}^k$.
  Pour $0 \leq k \leq +\infty$, on note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ à valeur dans $\mathbb{C}$.

Les propriétés suivantes restent vraies pour des fonctions à valeurs complexes :

- Les propriétés sur les opérations $+$ et $\times$ et la formule de Leibniz restent valables.
- Soit J un intervalle réel. Si $\varphi : I \to J$ et $f : J \to \mathbb{C}$ sont dérivables, alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et on a : $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.

On n'a plus la notion d'extremum pour les fonctions à valeurs complexes. Donc il n'y a pas de théorème de Rolle, d'égalité ou d'inégalité des accroissements finis. Par exemple : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array} \right.$ définie sur $[0;\ 2\pi]$ est telle que $f(0) = f(2\pi) = 1$. Pourtant $f'(t) = ie^{it}$ donc : $\forall t \in]0;\ 2\pi[,\ f'(t) \neq 0$.

On a cependant le théorème suivant :

Théorème 4

Soit $f : [a; b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 sur $[a; b]$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in]a; b[,\ |f'(t)| \leq M.$$

Nous avons de plus l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

Exercice 10

[M3] Calculer la dérivée n ième de $x \mapsto \cos(x) \times \exp(x)$ ou de $\sin \times \exp$ en allant dans $\mathbb{C}$.