# Dénombrement

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

1. Savoir reconnaître et combiner les outils de dénombrement (listes, arrangements, combinaisons, principes additifs et multiplicatif) dans des situations pratiques.

# Plan

## Définition 1:

On appelle cardinal d'un ensemble fini $E$, et on note : $\mathrm{Card}(E)$ (ou $|E|$, ou $\#(E)$) le nombre d'éléments de $E$. Par convention, on pose : $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$.

## Proposition 1

Soient $E$ un ensemble fini et $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie de $E$. Alors $A$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.
De plus, si $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$ alors $A = E$.

## Proposition 2

Si $A$ et $B$ sont deux sous-ensembles d'un ensemble fini $E$, alors :

- $A \cup B$ est un ensemble fini ;
- $A \cap B$ est un ensemble fini ;
- $\overline{A}$ est fini ;

De plus : $$\begin{array}{l} \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B) \\ \mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A) \end{array}$$

**conséquence :**

Si $A$ et $B$ sont disjoints, c'est à dire lorsque $A \cap B = \emptyset$, alors :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Plus généralement, si $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ sont deux à deux disjoints, alors :

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(A_k).$$

En pratique on utilise la formule ci-dessus lorsqu'on effectue un dénombrement en procédant par disjonction des cas. On parle parfois de principe additif.

## Proposition 3

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

REMARQUE : Plus généralement, si $E_1$, $E_2$, ..., $E_p$ sont des ensembles finis, alors $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) = \prod_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(E_i).$$

On utilise en pratique la formule ci-dessus lorsqu'on effectue un dénombrement en le découpant en étapes successives. On parle parfois de principe multiplicatif.

*Exemple :* Pour s'habiller, un homme dispose de $4$ chemises, $3$ pantalons et $5$ paires de chaussettes. Pour calculer ceci on découpe en étapes successives :

- On commence par choisir une paire de chaussettes : il y a $\mathrm{Card}(C)$ possibilités.
- Puis on choisit le pantalon : il y a $\mathrm{Card}(B)$ possibilités.
- On finit par choisir la chemise : il y a $\mathrm{Card}(A)$ possibilités.

Par principe multiplicatif nous obtenons $\mathrm{Card}(C) \times \mathrm{Card}(B) \times \mathrm{Card}(A)$ tenues.

## Exercice 1

[ -M1- ] Dans un lycée de $1200$ élèves, $652$ pratiquent une activité sportive, $327$ jouent d'un instrument de musique et $453$ ne font ni sport ni musique. Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens.

# Plan

➩ $p$-uplets :

### Définition 2:

Soit $E$ un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$. Un p-uplet, ou encore une p-liste, d'éléments de $E$ est un élément de $E^p = \underbrace{E \times \ldots \times E}_{p \text{ fois}}$.

### Proposition 4

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $E$ est de cardinal $n$ alors le nombre de p-uplets est $\underbrace{n \times \cdots \times n}_{p \text{ fois}} = n^p$.

*ExempleS :(dénombrements classiques)*

1. Considérons le tirage avec remise d'une boule d'une urne en contenant 10. On le fait $p$ fois de suite en la remettant à chaque fois. Puisque l'on remet à chaque fois la boule avant le tirage suivant, les répétitions sont possibles et puisque les tirages sont successifs, l'ordre à une importance . Ainsi, le nombre de tirages possibles correspond au nombre de $p$ listes d'éléments de l'ensemble des $10$ boules, d'où $\boxed{10^p \text{ possibilités}}$.

## Définition 3:

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leq n$ et $E$ un ensemble de cardinal $n$. On appelle un arrangement de $p$ éléments de $E$ tout p-uplet d'éléments de $E$ deux à deux distincts.

## Proposition 5

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leq n$. Le nombre d'arrangements à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments est égal à

$$n(n-1)\cdots(n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

*Exemple :(dénombrements classiques associés)*
On tire 4 fois de suite et sans remise une boule d'une urne en contenant 10 boules distinctes.
Puisqu'ici les tirages sont sans remise, les répétitions sont impossibles et puisque les tirages sont successifs, l'ordre à une importance. Ainsi, le nombre de tirages possibles correspond au nombre d'arrangements de $4$ listes d'éléments de l'ensemble des $10$ boules, d'où :

$$\boxed{\frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \text{ possibilités}}.$$

## Définition 4:

Soient $E$ un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle permutations de $E$ tous les arrangements de $n$ éléments de $E$.

*Exemple :* $E = \{1;\ 2;\ 3\}$, alors les permutations de $E$ sont : $(1;\ 2;\ 3)$, $(1;\ 3;\ 2)$, $(2;\ 3;\ 1)$, $(2;\ 1;\ 3)$, $(3;\ 1;\ 2)$ ; $(3;\ 2;\ 1)$.

## Proposition 6

Si $\mathrm{Card}(E) = n \in \mathbb{N}^*$, alors l'ensemble des permutations de $E$ est fini, de cardinal $n!$.

*Exemple :(dénombrements classiques associés)*
nombre d'anagrammes de LAPINS : Ici l'ordre des lettres à une importance , sinon les mots ne sont pas les mêmes. De plus on ne peut pas mettre plusieurs fois $A$ car ce dernier n'est présent qu'une fois. On est donc dans une situation d'arrangements , mais où le nombre de lettres correspond à la taille du mot, donc d'arrangements de $6$ élements de l'ensemble des $6$ lettres. Il y a donc : $6!$ anagrammes de LAPINS.

**notations :** On note :

- $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$ (ou encore des sous-ensembles de $E$) ;
- $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de $E$ ayant $p$ éléments.

## Proposition 7

Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, alors :

- pour $p \in [\![0;\ n]\!]$, $\mathrm{card}(\mathcal{P}_p(E)) = \binom{n}{p}$
- $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

*Exemple : (Dénombrements classiques associés)* En pratique les coefficients binômiaux (et donc l'utilisation du premier résultat ci-dessus) interviennent dans des situations de dénombrement simultanés, c'est à dire où l'ordre n'a pas d'importance.

1. Tirages simultanés de $3$ boules dans une urne contenant $10$ boules. Si l'on note $E = \{B_1, \dots, B_{10}\}$ l'ensemble des $10$ boules, il faut comprendre que, les tirages étant simultanés, on ne peut distinguer $(B_3, B_2, B_1)$ de $(B_1, B_2, B_3)$. En effet $(B_3, B_2, B_1)$ voudrait dire qu'on a tiré d'abord $B_3$, puis $B_2$ et enfin $B_1$ ce qui n'a aucun sens ici !
2. Le nombre de façons de placer $p$ objets identiques dans $n$ cases distinctes est égal à $\binom{n}{p}$.

## Exercice 2

[ -M1- ] On lance trois fois de suites un dé à six faces.

(Q 1) Combien y a-t-il de résultats possibles ?

(Q 2) Combien contiennent au moins un $1$ ?

(Q 3) Combien contiennent une seule fois le nombre $1$ ?

(Q 4) Combien contiennent au moins deux faces identiques ?

## Exercice 3

[ -M1- ] Un sac contient $26$ jetons reprenant les $26$ lettres de l'alphabet.

- (Q 1) On tire simultanément $5$ jetons du sac. Déterminer le nombre de tirages distincts contenant
  1. exactement deux voyelles,
  2. au moins une voyelle.
- (Q 2) On tire successivement $5$ jetons avec remise. Déterminer le nombre de tirages distincts contenant
  1. exactement deux voyelles,
  2. au moins une voyelle.
- (Q 3) On tire successivement $5$ jetons sans remise. Déterminer le nombre de tirages distincts contenant
  1. exactement deux voyelles,
  2. au moins une voyelle.

## Exercice 4

[ -M1- ]

1. On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie ayant un côté PILE et un côté FACE. Combien a-t-on de tirages contenant exactement trois PILES , deux PILES ?
2. On lance $n \in \mathbb{N}^*$ fois de suite une pièce de monnaie ayant un côté PILE et un côté FACE. Quel est le nombre total de l'ensemble des tirages ? On note cet ensemble $E$. Soit $A_k$ l'ensemble des tirages contenant exactement $k$ piles. Calculer $\mathrm{Card}(A_k)$, expliquer que $E = \cup_{k=0}^{n} A_k$ et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

3. Comment calcule-t-on d'habitude $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$?

# Plan

## Proposition 8

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application.

1. Si $f$ est injective, alors $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$.
2. Si $f$ est surjective, alors : $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$.
3. Si $f$ est bijective, alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

## Proposition 9

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis de même cardinal et $f\ : E \to F$. Nous avons équivalence entre :

(i) $f$ est injective ;

(ii) $f$ est surjective ;

(iii) $f$ est bijective.

RAPPEL : On note : $\mathcal{F}(E;\ F)$ l'ensemble des applications de $E$ vers $F$.

## Proposition 10

Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis de cardinaux non nuls, alors $\mathcal{F}(E;\ F)$ est un ensemble fini et : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E;\ F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{card}(E)}$.

REMARQUE : Si $\mathrm{Card}(E) = p$, alors $\mathcal{F}(E;\ F)$ est de même cardinal que l'ensemble des $p$-listes d'éléments de $F$.

## Proposition 11

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \leq n$, $E$ un ensemble de cardinal $p$ et $F$ de cardinal $n$. Le nombre d'applications injectives de $E$ vers $F$ est égal à :

$$n(n-1)\cdots(n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

**conséquence :**

Une application bijective $f : E \to F$ étant une application injective entre deux ensembles finis de même cardinal d'après précédemment , on en déduit que le nombre d'applications bijectives de $E$ vers $F$ est $n!$ avec $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) = n$.