Comparaison des suites et fonctions

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

Plan

Définition :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n), et on note $u_n \sim v_n$, lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Proposition (propriétés de la relation d'équivalence)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. Alors :

1. $u_n \sim u_n$; (réflexivité)
2. $u_n \sim v_n \Rightarrow v_n \sim u_n$; (symétrie)
3. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$. (transitivité)

Proposition

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors :

(a) $e^{u_n} - 1 \sim u_n$; (b) $\ln(1+u_n) \sim u_n$; (c) $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(d) $\sin(u_n) \sim u_n$; (e) $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u_n^2}{2}$; (f) $\tan(u_n) \sim u_n$;

(g) $\mathrm{sh}(u_n) \sim u_n$; (h) $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \sim \dfrac{u_n^2}{2}$;

(i) $\mathrm{Arcsin}(u_n) \sim u_n$; (j) $\mathrm{Arctan}(u_n) \sim u_n$.

Exercice

Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux suivants :

(a) $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1$; (b) $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$; (c) $e^{1/\ln(n)} - 1$; (d) $e^n - 1$.

Tous ces équivalents usuels ne s'appliquent **UNIQUEMENT** que lorsque

⇨ Équivalents et opérations usuelles :

Proposition

Les opérations usuelles sont les suivantes :

- **(multiplication par un réel) :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, si $u_n \sim v_n$, alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$;
- **(produit) :** Si $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$, alors $u_n v_n \sim a_n b_n$;
- **(quotient) :** Pour (v_n) non nulle à partir d'un certain rang, si $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{a_n}{b_n}$;
- **(puissance) :** Pour $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et $\alpha \in \mathbb{R}$, si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Exercice

Déterminer les équivalents des suites de termes généraux suivants :

(a) $n\left(e^{1/n}-1\right)$; (b) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

(c) $\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)}}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$; (d) $n^2\left(e^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)$.

⇨ Équivalents de suites polynômiales :

Proposition

Soit (u_n) telle que :

$$u_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + ... + a_0,$$

avec $a_p \neq 0$. Alors $u_n \sim a_p n^p$.

⇨ Équivalents et limites :

Proposition

Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$,alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$;
2. Si ℓ est finie et non nulle et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $u_n \sim \ell$.

Le 2. de la proposition précédente est faux pour $\ell = 0$. Par exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 mais n'est pas équivalente à 0

Plan

Définition :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

1. On dit que (u_n) est dominée par (v_n), et on note $u_n = O(v_n)$, si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
2. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), et on note $u_n = o(v_n)$, si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Proposition

1. Si $u_n = o(v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;
2. Si $u_n = O(v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

⇨ Prépondérance et équivalents :

Proposition

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$.
2. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n = o(w_n)$, alors : $u_n = o(w_n)$.

⇨ Opérations usuelles :

Proposition

Les opérations usuelles sont les suivantes :

- **(transitivité) :** Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$ (de même pour O).
- **(multiplication par un réel) :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, si $u_n = o(v_n)$, alors $\lambda u_n = o(v_n)$; (de même pour O) ;
- **(multiplication par une suite) :** Si $u_n = o(a_n)$, alors $u_n v_n = o(a_n v_n)$ (de même pour O) ;
- **(produit) :** Si $u_n = o(a_n)$ et $v_n = o(b_n)$, alors $u_n v_n = o(a_n b_n)$ (de même pour O) ;
- **(puissance) :** Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et $u_n = o(v_n)$, alors $u_n^\alpha = o\left(v_n^\alpha\right)$ (de même pour O) ;
- **(somme) :** Si $\left.\begin{array}{l} u_n = o(a_n) \\ v_n = o(a_n) \end{array}\right\}$, alors $u_n + v_n = o(a_n)$ (de même pour O).

Exercice

On pose : $u_n = e^{1/n}$ et $v_n = (1+\frac{1}{n})^3$.

1. Déterminer des réels a, b, c et d tels que : $u_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, $v_n = c + \frac{d}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. En déduire un équivalent simple de la suite de terme général : $e^{1/n} + (1+\frac{1}{n})^3 - 2$.

⇨ Comparaison des suites de référence :

Proposition

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a > 1$. Alors :

1. $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$;
2. $n^\alpha = o(a^n)$;
3. $a^n = o(n!)$;
4. $n! = o(n^n)$.

Plan

Définition :

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ si

1. g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut être en a
2. $\lim_a \frac{f}{g} = 1$.

REMARQUES :

(1) Si $f(x) \sim_a 0$, alors f est nulle sur un voisinage de a ;

(2) Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors f et g sont de même signe sur un voisinage de a.

Proposition (propriétés de la relation d'équivalence)

1. $f(x) \sim_a f(x)$; (réflexivité)
2. $f(x) \sim_a g(x) \Rightarrow g(x) \sim_a f(x)$; (symétrie)
3. Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $g(x) \sim_a h(x)$, alors $f(x) \sim_a h(x)$. (transitivité)

Proposition

Soit u une fonction réelle telle que $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$. Alors :

- $e^{u(x)} - 1 \sim_a u(x)$;
- $\ln(1+u(x)) \sim_a u(x)$;
- $(1+u(x))^\alpha - 1 \sim_a \alpha u(x)$;
- $\sin(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $\tan(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $1 - \cos(u(x)) \sim_a \frac{u^2(x)}{2}$;
- $\text{sh}(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $\text{th}(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $\text{ch}(u(x)) - 1 \sim_a \frac{u^2(x)}{2}$;
- $\arcsin(u(x)) \sim_a u(x)$;
- $\arctan(u(x)) \sim_a u(x)$;

Exercice

Déterminer un équivalent simple en 1 de $\ln(x)$.

Tous ces équivalents usuels ne s'appliquent **UNIQUEMENT** que lorsque $\lim_{x \to a} u(x) = 0$.

Proposition

Les opérations usuelles sont les suivantes :

- **(multiplication par un réel) :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, si $f \sim_a g$, alors $\lambda f \sim_a \lambda g$;
- **(produit) :** Si $f \sim_a h_1$ et $g \sim_a h_2$, alors $fg \sim_a h_1 h_2$;
- **(quotient) :** Pour g non nulle au voisinage de a, si $f \sim_a h_1$ et $g \sim_a h_2$ alors $\frac{f}{g} \sim_a \frac{h_1}{h_2}$;
- **(puissance) :** Pour $g > 0$ au voisinage de a et $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f \sim_a g$, alors $f^\alpha \sim_a g^\alpha$.

(1) Pour le dernier point ci-dessus, α doit être **CONSTANT** : par exemple, $e^x \sim_0 1$ mais $(e^x)^{1/x} \nsim_0 \underbrace{1^x}_{=1}$ puisque $(e^x)^{1/x} = e$.

(2) De même, on ne peut ni sommer ni soustraire. Par exemple $x + 1 \sim_{+\infty} x$ mais $1 = (x+1) - x \nsim_{+\infty} \underbrace{x - x}_{=0}$.

(3) Enfin, nous ne pouvons pas composer les équivalents par une fonction. Par exemple $x + 1 \sim_{+\infty} x$, mais $e^{x+1} = ee^x \nsim_{+\infty} e^x$ (le quotient tend vers $e \neq 1$).

Exercice

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point proposé :

(a) $x(e^{1/x} - 1)$, $a = +\infty$; (b) $e^x - e$, $a = 1$; (c) $\dfrac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}$, $a = \frac{\pi}{2}$.

Proposition

1. Si $f(x) \sim_a g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
2. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ avec $\ell \neq 0$, alors $f(x) \sim_a \ell$.

le 2. de la proposition précédente est **FAUX** lorsque $\ell = 0$. En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$, mais $\sin(x) \nsim_0 0$ puisque la fonction sinus n'est pas nulle sur un voisinage de 0.

Plan

Définition :

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a sauf éventuellement en a.

1. On dit que f est dominée par g au voisinage de a et on note $f = \underset{a}{O}(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ si
   1. g ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a
   2. $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
2. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f = \underset{a}{o}(g)$ ou $f(x) =_{x\to a} o(g(x))$ si
   1. g ne s'annule pas au voisinage de a sauf peut être en a
   2. $\lim_a \frac{f}{g} = 0$.

REMARQUES :

(1) Si $f = o_a(g)$, alors $f = O_a(g)$.

(2) $f = O_a(1)$ si et seulement si f est bornée au voisinage de a.

(3) $f = o_a(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Proposition (prépondérance, domination et limites)

1. Si $f = o_a(g)$ et g est bornée sur un voisinage de a, alors $\lim_{x \to a} f(x) = 0$;
2. Si $f = O_a(g)$ et $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Proposition

1. $f \sim_a g \Leftrightarrow f = g + o_a(g)$.
2. Si $f \sim_a g$ et $g = o_a(h)$, alors : $f = o_a(h)$.

Proposition

Les opérations usuelles sont les suivantes :

- **(transitivité) :** Si $f = o_a(g)$ et $g = o_a(h)$, alors $f = o_a(h)$ (de même pour O).
- **(multiplication par un réel) :** Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, si $f = o_a(g)$, alors $\lambda f = o_a(g)$; (de même pour O) ;
- **(multiplication par une fonction) :** Si $f = o_a(g)$, alors $fh = o_a(gh)$ (de même pour O) ;
- **(produit) :** Si $f = o_a(h_1)$ et $g = o_a(h_2)$, alors $fg = o_a(h_1 h_2)$ (de même pour O) ;
- **(puissance) :** Si $g > 0$ à partir d'un certain rang et $f = o_a(g)$, alors $f^\alpha = o_a\left(g^\alpha\right)$ (de même pour O) ;
- **(somme) :** Si $\left.\begin{array}{l} f = o_a(h) \\ g = o_a(h) \end{array}\right\}$, alors $f + g = o_a(h)$ (de même pour O).

1. Pour la somme, les deux fonctions doivent être comparées à une même fonction. Par exemple, $1 = o_{+\infty}(x)$, $2 = o_{+\infty}(x+1)$ mais $\underbrace{2-1}_{=1}$ n'est pas négligeable en $+\infty$ devant $\underbrace{(x+1)-x}_{=1}$;
2. Nous avons : $o_a(f) - o_a(f) = o_a(f)$! !

Proposition

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors :

1. $(\ln x)^\beta = o_{+\infty}(x^\alpha)$;
2. $|\ln x|^\beta = o_0\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$;
3. $x^\alpha = o_{+\infty}\left(e^{\beta x}\right)$;
4. $e^{\beta x} = o_{-\infty}\left(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)$.