

Calcul matriciel

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- MI1 Réaliser un produit de matrices avec les bonnes tailles et maîtriser la formule associée ;
- MI2 Calculer des puissances de matrices carrées, notamment à l'aide du binôme de Newton ;
- MI3 Montrer qu'une matrice est inversible, connaître sa définition ainsi que ses différentes caractérisations et calculer l'inverse d'une matrice inversible ;
- MI4 Faire le lien entre opérations élémentaires et produit matriciel ;
- MI5 Maîtriser la transposition de matrices.
- MI6 Comprendre la structure des solutions d'un système linéaire.

Notations : On note ci-dessous, sauf mentions contraires : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Plan

1 Généralités

- Ensemble des matrices
- Combinaison linéaire de matrices
- Produit de matrices
- Transposée d'une matrice quelconque
- Matrices élémentaires
- Écriture matricielle d'un système linéaire à l'aide du produit de matrices
- Les exercices du jour

2 Produit de matrices carrées et matrices carrées particulières

3 Matrices inversibles

Définition 1:

Soient n et p deux entiers strictement positifs.

- ① On appelle matrice de taille np et à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n lignes et p colonnes. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \text{ avec } a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

- ② On dit que deux matrices de taille np et à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont égales lorsque leurs coefficients sont égaux ;
- ③ On note :
- $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille np et à coefficients dans $\mathbb{K}$,
 - O_{np} l'élément de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0,
- ④ Lorsque $p = n$, on dit que la matrice est carrée, et on écrit plus simplement :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$,
 - O_n au lieu de O_{nn} .

REMARQUE : Nous utilisons également les notations :

- $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} ;$
- $A = (C_1, C_2, \dots, C_p)$ où $C_1, C_2, \dots, C_p$ sont les colonnes de A ;
- $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$, où $L_1, L_2, \dots, L_n$ sont les lignes de A .

Définition 2:

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}, \lambda \in \mathbb{K}$, on note :

- ① $A + B$ la matrice de $M_{np}(\mathbb{K})$, de coefficients :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad a_{ij} + b_{ij};$$

- ② λA la matrice de $M_{np}(\mathbb{K})$, de coefficients :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket; \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad \lambda a_{ij}.$$

Proposition 1 (structure d'espace vectoriel)

- ① $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien. Plus précisément :
 - Pour tous $(A; B) \in (\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}))^2$, $A + B = B + A$;
 - L'élément neutre est $0_{M_{n,p}}$, c'est à dire :
 $\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}), ; 0_{n,p} + A = A$
 - Le symétrique de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est $-A$: $A + (-A) = 0_{n,p}$.
- ② Pour A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et λ, μ deux éléments de $\mathbb{K}$ quelconques :
 - $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
 - $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
 - $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.
 - $1_{\mathbb{K}}A = A$
 - $0.A = 0_{M_{n,p}}$

Définition 3:

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{rp}(\mathbb{K})$, on appelle produit de A et B , et on note $AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ la matrice telle que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ir} b_{rj}.$$

REMARQUE : Pour que le produit AB existe, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B .

Proposition 2(propriétés du produit matriciel)

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, alors :

- ❶ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$, $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$;
- ❷ pour $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$, $(A + B)C = AC + BC$;
- ❸ pour $B \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$, $A(B + C) = AB + AC$;
- ❹ pour $B \in \mathcal{M}_{pr}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{rs}(\mathbb{K})$, $(AB)C = A(BC)$;
- ❺ $0_{rn}A = 0_{rp}$ et $A0_{pr} = 0_{nr}$.

Proposition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,m}$ alors

$$AB = (AB_1 \cdots AB_m)$$

où $B_1, \dots, B_m$ sont les colonnes de B .

$$AB = \begin{pmatrix} L_1 B \\ \vdots \\ L_n B \end{pmatrix}$$

où $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de A .

Définition 4:

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de A et on note $A^T = (a'_{ij})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, a'_{ij} = a_{ji}.$$

REMARQUE : Transposer une matrice revient à transformer les colonnes en ligne et les lignes en colonne.

Proposition 4(propriétés de la transposition)

- ❶ Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $(A^T)^T = A$;
- ❷ Pour A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- ❸ Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
- ❹ Pour $A \in \mathcal{M}_{nr}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{rp}(\mathbb{K})$, $(AB)^T = B^T A^T$.

Définition 5:

Pour $(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket$, on appelle matrice élémentaire et on note $E_{ij} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ la matrice dont le seul coefficient non nul est égal à 1 et est situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j .

Toute matrice peut s'écrire comme combinaison linéaire des matrices élémentaires. En effet, si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ alors :
$$A = \sum_{(i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket} a_{ij} E_{ij}.$$

Proposition 5

- ❶ Si $E_{ij} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $E_{jl} \in \mathcal{M}_{r,p}$ alors $E_{ij}E_{jl} = E_{il} \in \mathcal{M}_{n,p}$.
- ❷ Si $E_{ij} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $E_{kl} \in \mathcal{M}_{r,p}$ $E_{ij}E_{kl} = 0_{np}$.

REMARQUE : La proposition précédente s'écrit également de façon plus condensée : $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ où δ_{jk} vaut 1 si $j = k$ et 0 sinon (ce symbole est appelé symbole de Kronecker).

$$\text{Soit } (S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} ; \text{ avec } a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$$

(S) s'écrit matriciellement : $AX = B$ (Ici AX est le produit de la matrice A avec la matrice X) d'inconnue la matrice colonne X .

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}).$$

Proposition 6

On note $(S) : AX = B$ et $(S_H) : AX = 0$ son système homogène associé.

- ❶ Si X_H est solution de (S_H) et X_0 est solution de (S) , alors $X_0 + X_H$ est solution de (S) .
- ❷ Réciproquement, toute solution X de (S) s'écrit sous la forme :
 $X = X_0 + X_H$, où X_0 est solution de (S) et X_H est solution de (S_H) .

Exercice 1

[M1] Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer tous les produits possibles de deux matrices parmi les matrices précédentes.

Exercice 2

[M6] Donner l'écriture matricielle de ces systèmes linéaires puis les résoudre. Dites si le système est compatible et dans ce cas, analysez une solution particulière et une solution du système homogène dans votre ensemble de solutions.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases} ; & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + y + 2z + 2t = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases} ; \\
 \text{(c)} \quad & \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + y + 2z + 2t = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 0 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Plan

- 1 Généralités
- 2 Produit de matrices carrées et matrices carrées particulières
 - Produit de matrices carrées
 - Puissances de matrices carrées
 - Matrices triangulaires et diagonales
 - Les matrices symétriques ou anti-symétriques
 - Les exercices du jour
- 3 Matrices inversibles

REMARQUE : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors : $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que le produit matriciel est une loi de composition interne pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 6:

La matrice identité noté $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est telle que tous ses coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux égaux à 1.

Proposition 7

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit matriciel est :

- associatif : $A(BC) = (AB)C$;
- non commutatif : $AB \neq BA$ en toute généralité.
- admet un élément neutre : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AI_n = I_n A = A$.

Notation : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note : $A^0 = I_n$, $A^1 = A$ et pour tout $n \geq 2$, $A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ matrices}}$.

Proposition 8(binôme de Newton)

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, c'est à dire tels que : $AB = BA$. Alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k A^{n-k}.$$



Il faut absolument vérifier $AB = BA$. En effet, sinon, pour $n = 2$,
 $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + \underbrace{AB + BA}_{\neq 2AB \text{ en toute généralité}} + B^2.$

Définition 7:

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est :

- ① triangulaire supérieure lorsque : $a_{ij} = 0$ pour $i > j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- ② triangulaire inférieure lorsque : $a_{ij} = 0$ pour $i < j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

REMARQUE : On dit que A diagonale lorsque A est triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

Définition 8:

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est :

- ① symétrique si $A^T = A$;

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques.

- ② antisymétrique si $A^T = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

REMARQUE : A est symétrique si et seulement si :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

A est antisymétrique si et seulement si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 10 Stabilité

Soient A et B deux matrices symétriques (resp. antisymétriques). Alors :

- ❶ $A + B$ est symétrique (resp. antisymétrique) ;
- ❷ Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, λA est symétrique (resp. antisymétrique).



Le produit de deux matrices symétriques n'est pas forcément symétrique. De même pour les matrices antisymétriques. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, nous avons A et B symétriques, mais $AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique.

Exercice 3

[M1] On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $a_{ij} = \frac{1}{j}$. Montrer que $A^2 = \lambda A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à préciser.

Exercice 4

[M1] On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $A = (\omega^{(k-1)(j-1)})_{1 \leq k, j \leq n}$. Calculer alors $A\overline{A}$ où $\overline{A}$ est la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A .

Exercice 5

[M1] Soit $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Que peut-on dire des tailles des matrices $LC?CL?$ Quelle est leur expression ?

Exercice 6

[M2] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

- 01 Calculer B^2 , B^3 , puis B^n pour $n \geq 3$.
- 02 En déduire A^n pour tout entier n .

Exercice 7

[M5] Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on pose : $S = AA^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que S est symétrique.

Plan

- 1 Généralités
- 2 Produit de matrices carrées et matrices carrées particulières
- 3 Matrices inversibles
 - Définition et première propriété
 - Inversibilité de matrices particulières
 - Inversibilité et opérations élémentaires sur les matrices
 - Caractérisations de l'inversibilité
 - Les exercices du jour

Définition 9:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible lorsque A lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $AB = BA = I_n$. On note alors $B = A^{-1}$ et on appelle B l'inverse de A .

Notations : On note $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Proposition 11(propriétés algébriques des matrices inversibles)

$\text{GL}_n(\mathbb{K})$ muni du produit matriciel est un groupe. Plus précisément :

- 1 Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et l'inverse de A^{-1} est A : $(A^{-1})^{-1} = A$;
- 2 Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- 3 Si A est inversible, alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Proposition 12

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et A a une ligne ou une colonne nulle, alors A n'est pas inversible.

Proposition 13

- 1 Une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- 2 L'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

Définition 10:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On appelle

- ❶ matrice de dilatation une matrice d'expression :

$$D_i(\lambda) = \sum_{k=1, k \neq i}^n E_{kk} + \lambda E_{ii} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

- ❷ matrice de transvection une matrice d'expression :

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

- ❸ matrice de permutation une matrice d'expression :

$$P_{ij} = \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^n E_{kk} + E_{ij} + E_{ji} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Proposition 14

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$; $\lambda \in \mathbb{K}^*$; $i, j \in \{1; \dots; n\}$; $i \neq j$ Effectuer les opérations élémentaires suivantes sur les lignes de la matrice (ou du système) :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ revient à multiplier A à gauche par $D_i(\lambda)$.
- $L_i \leftrightarrow L_j$ revient à multiplier A à gauche par P_{ij} .
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ revient à multiplier la matrice A à gauche par $T_{ij}(\lambda)$.

Proposition 15

Les matrices élémentaires sont inversibles et $\forall (i; j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 (i \neq j)$:

❶ $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda});$

❷ $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda);$

❸ $P_{ij}^{-1} = P_{ij}.$



conséquence :



❶ Si $A \sim_L B$ et B est inversible, alors A est inversible.

❷ Si $A \sim_L B$ et B n'est pas inversible, alors A n'est pas inversible.

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (a) A est inversible ;
- (b) L'équation d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = 0$ n'admet que la solution nulle ;
- (c) Pour tout Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ admet une unique solution.

Exercice 8

[M3] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ❶ Calculer A^2 .
- ❷ Vérifier qu'il existe $a; b \in \mathbb{R}; A^2 = aA + bI_2$.
- ❸ En déduire que A est inversible et donner A^{-1} .

Exercice 9

[M3] Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 10

[M3] $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), n \geq 2$. Montrer que J n'est pas inversible.