Calcul algébrique réel

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Écrire la négation d'un énoncé mathématique ;
- M2 Maîtriser les notions d'implications et d'équivalences ;
- M3 Maîtriser le vocabulaire de la théorie des ensembles ;
- M4 Maîtriser les techniques usuelles de raisonnement ;
- M5 Manipuler les inégalités réelles ;
- M6 Factoriser une expression polynômiale ;
- M7 Résoudre des équations ou inéquations en présence de paramètre(s) ;
- M8 Résoudre des petits systèmes linéaires.

Plan

1. Quantificateurs logiques et assertions
   - Quantificateurs logiques
   - Assertions
   - Implications et équivalences
   - Négation d'une assertion
   - Les exercices du jour
2. Ensembles
3. Techniques de raisonnements mathématiques classiques
4. Expressions mathématiques élémentaires

On retiendra pour la suite les symboles suivants abondamment utilisés en mathématiques :

- $\forall$ se lit « pour tout » ;
- $\exists$ se lit « il existe » ;
- $/$ se lit « tel que ».

Attention à l'ordre de ces quantificateurs dans nos énoncés mathématiques. Par exemples :

- Considérons E l'ensemble des épreuves lors des derniers jeux olympiques et les deux assertions suivantes :
  - « Pour toute épreuve y, il existe un athlète x tel que l'athlète x a remporté l'épreuve y » ;
  - « Il existe un athlète x tel que pour toute épreuve y, l'athlète x a remporté l'épreuve y »
- Les énoncés :
  - « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}/n \leq x$ » ;
  - « $\exists n \in \mathbb{Z}/\forall x \in \mathbb{R}, n \leq x$ »

On peut toujours décider si un énoncé mathématique est vrai ou faux. Un énoncé mathématique est également appelé assertion ou proposition.

Définition 1:

Soient A et B deux assertions.

1. On dit que A implique B, et on note : $A \Rightarrow B$, lorsque B est vraie quand A est vraie ;
2. On dit que A et B sont équivalentes, et on note $A \Leftrightarrow B$, lorsque A implique B et B implique A.

REMARQUE : Supposons que $A \Rightarrow B$ soit vraie, avec A et B deux assertions. Alors,

1. on dit que A est une condition suffisante à B.
2. on dit que B est une condition nécessaire à A.

Définition 2:

Si A est une assertion, on appelle négation de A et on note $\neg A$ l'assertion qui est vraie quand A est fausse et fausse quand A est vraie.

Exercice 1

[-M 1 -] Préciser si les assertions suivantes sont vraies ou fausses puis donner leurs négations.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 \geq 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \ / \ xy = 1.$

Exercice 2

[-M 2 -] Compléter, lorsque cela est possible, les pointillés par $\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$:

a. $x^2 = x \ldots x = 1$;
b. $x \geq 1 \ldots x \geq 2$;
c. $x < 1 \ldots x = 1$;
d. $x + 3 \geq 4 \ldots x \geq 1$;

Plan

1. Quantificateurs logiques et assertions
2. Ensembles
   - Appartenance, inclusion et égalité
   - Produit cartésien
   - Opérations usuelles sur deux ensembles
   - Réunion et intersection de plusieurs sous-ensembles
   - Les exercices du jour
3. Techniques de raisonnements mathématiques classiques
4. Expressions mathématiques élémentaires

Un ensemble est une collection d'objets que l'on nomme <u>éléments</u>. Si x est un élément de l'ensemble E, on dit que x <u>appartient</u> à E, et on note : $x \in E$. Si, en revanche, x n'appartient pas à E, on note : $x \notin E$.

Soient E et F deux ensembles.

1. on dit que E est inclus dans F (ou que E est un sous-ensemble de F, ou que E est un partie de F), et on note $E \subset F$, lorsque :
   tout élement x de E appartient à F.
2. On dit que E et F sont égaux lorsque : $E \subset F$ et $F \subset E$. On note $E = F$.

Notation : On note : $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.

REMARQUE : On note $\emptyset$ l'ensemble vide, c'est à dire constitué d'aucun élément.
Alors : $\emptyset \subset E$.

Définition 3:

Si E et F sont deux ensembles, on appelle produit cartésien de E et F, et on note $E \times F$, l'ensemble : $E \times F = \{(x;\ y)\ /x \in E \text{ et } y \in F\}$.

REMARQUE : Plus généralement, on note :
$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = \{(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_p)\ /x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, \ldots, x_p \in E_p\}$.

Définition 4:

Soient E un ensemble et A, B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$. On appelle :

1. Réunion de A et B, et on note : $A \cup B$, le sous-ensemble de E : $A \cup B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ ou } B\}$.
2. Intersection de A et B, et on note : $A \cap B$, le sous-ensemble de E : $A \cap B = \{x \in E \ / \ x \in A \text{ et } B\}$.
3. le complémentaire de A, et on note $\overline{A}$, le sous ensemble de E : $\overline{A} = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$.
4. $A \setminus B$ désigne l'ensemble A privé des éléments de B : $A \setminus B = \{x \in A \ / \ x \notin B\}$.

REMARQUEs :

1. $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.
2. $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

Proposition 1

Soient $(A; B; C) \in \mathcal{P}(E)^3$. Alors

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Proposition 2(Lois de De Morgan)

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exemples :

1. Si l'on note A l'ensemble des personnes qui enseignent les mathématiques et B celles qui enseignent la physique (il existe des personnes qui enseignent les deux disciplines !) , alors : $\overline{A \cup B}$ correspond aux personnes qui n'enseignent ni les mathématiques, ni la physique, c'est à dire $\overline{A} \cap \overline{B}$.
2. En reprenant les deux ensembles précédents, $\overline{A \cap B}$ correspond aux personnes qui n'enseignent pas la physique ou qui n'enseignent pas les mathématiques, c'est à dire : $\overline{A} \cup \overline{B}$.

- La réunion et l'intersection d'ensembles ne se limite pas à deux ensembles.
- On fera attention au fait que : $([0;\ 3] \cup [1;\ 4]) \cap [2;\ 5]$ et $[0;\ 3] \cup ([1;\ 4]) \cap [2;\ 5])$ sont différents (le premier correspond en fait à $[2;\ 4]$ et le second à : $[0;\ 4]$).
- Avec les quantificateurs logiques :
  $x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \Leftrightarrow \exists i \in [\![1;\ 3]\!] / x \in A_i$.
  $x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1;\ 3]\!], x \in A_i$.
- En reprenant le point précédent : si l'on note $I = [\![1;\ 3]\!]$, on écrit aussi : $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ et $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \bigcap\limits_{i \in I} A_i$.
- Plus généralement, que I soit fini ou non :
  $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I\ / x \in A_i$;
  $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$.

  Par exemples : $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[= \{0\}$ et $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[=]-1;\ 1[$.

Exercice 3

[-M 3 -] Soient A et B deux ensembles tels que $A \cup B = A$. Montrer que $A \cap B = B$.

Plan

1. Quantificateurs logiques et assertions
2. Ensembles
3. Techniques de raisonnements mathématiques classiques
   - Raisonnement par disjonction des cas
   - Raisonnement par double inclusion
   - Raisonnement par analyse-synthèse
   - Raisonnement par contraposition
   - Les exercices du jour
4. Expressions mathématiques élémentaires

Lorsque l'on veut démontrer une assertion ou résoudre une équation/inéquation, il est fréquent de devoir différencier notre raisonnement suivant plusieurs situations. C'est ce que l'on appelle la disjonction des cas. Par exemple : pour résoudre le système : $mx + 3 = 0$ on devra découper le raisonnement suivant les cas $m = 0$ et $m \neq 0$.

Pour montrer l'inclusion entre deux ensembles, il est parfois plus pratique de montrer d'abord que $A \subset B$ puis $B \subset A$ dans un deuxième temps. C'est ce que l'on appelle le raisonnement par double inclusion.

Exemple : Résolution de l'équation $\sqrt{x^2-3x}=2-x$

Il faudra éviter de rédiger comme suit :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-3x}=2-x \quad & \Leftrightarrow x^2-3x=(2-x)^2\\ & \Leftrightarrow \cancel{x^2}-3x=4-4x+\cancel{x^2}\\ & \Leftrightarrow x=4\end{aligned}$$

On pourra en revanche rédiger la résolution en suivant le raisonnement par ANALYSE SYNTHESE qui consiste en deux phases :

- Analyse. On cherche les solutions par implications successives.
- Synthèse : on vérifie si ces nombres sont solutions.

Le raisonnement par ANALYSE SYNTHESE se rédige en séparant les deux phases suivantes :

- Analyse. On cherche les solutions par implications successives.
- Synthèse : on vérifie si ces nombres sont solutions.

Pour démontrer $A \Rightarrow B$ il est parfois plus simple de démontrer que $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Exercice 4

[-M 4 -] Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 4x - y = 1\}$ et $B = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{(t + 1;\ 4t + 3)\}$.
Démontrer que $A = B$.

Exercice 5

[-M 4 -] Résoudre $\sqrt{x^2 + x + 3} = 2x - 1$.

Exercice 6

[-M 4 -M 7 -] Résoudre l'équation suivante : $mx^2 + 2x + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

[-M 4-] Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.

1. On considère f une fonction satisfaisant la relation précédente. Que vaut $f(0)$? $f(1)$?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En substituant x par $1-x$ dans la relation, déterminer $f(x)$.
3. Quelles sont les fonctions f solutions du problème ?

Exercice 8

[-M 4-] Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer, en raisonnant par contraposition, que : $\forall \epsilon > 0,\ x \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

Plan

1. Quantificateurs logiques et assertions
2. Ensembles
3. Techniques de raisonnements mathématiques classiques
4. Expressions mathématiques élémentaires
   - Inégalités
   - Factorisation d'expressions et équations mathématiques
   - Résolution de petits systèmes
   - Les exercices du jour

Définition 5:

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie donc les propriétés suivantes :

1. $\leq$ est transitive. Pour tous réels x, y, z tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.
2. $\leq$ est anti-symétrique. Pour tous réels x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$.
3. $\leq$ est reflexive. Pour tout réel$x$, $x \leq x$.

De plus, cette relation est totale. C'est à dire, pour tous réels x et y alors soit $x \leq y$ soit $y \leq x$.

Il est possible de comparer deux nombres réels, à l'aide de la relation $\leq$. On rappelle que :

➪ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un nombre positif, l'inégalité est inchangée ;

➪ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif, l'inégalité est renversée.

Proposition 3

Soient (a, b, x, y) quatre nombres réels.

1. On peut additionner deux inégalités : $\begin{cases} a \leq x \\ b \leq y \end{cases} \Rightarrow a + b \leq x + y$
2. On peut multiplier des inégalités dont les membres sont tous positifs : $\begin{cases} 0 \leq a \leq x \\ 0 \leq b \leq y \end{cases} \Rightarrow ab \leq xy.$

Attention aux deux autres opérations. *On ne peut pas soustraire, ni diviser deux inégalités ensembles.*

Factoriser une expression, c'est écrire cette dernière sous la forme d'un produit.
Pour factoriser, on utilisera très souvent les deux techniques suivantes :

➪ les identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$
	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$

➪ la division euclidienne :

On appelle expression polynômiale (réelle) toute expression de la forme : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels quelconques et n est un entier naturel quelconque.

Proposition 4

Si une expression polynômiale s'annule pour une valeur α, alors il est factorisable par $x - \alpha$.

On cherche à résoudre des systèmes de la forme suivante :

- Systèmes de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right.$$

  avec a, b, c, a', b', c' réels.

- Systèmes de deux équations à trois inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & d \\ a'x+b'y+c'z & = & d' \end{array}\right.$$

  avec $a, b, c, d, a', b', c', d'$ réels.

- Systèmes de trois équations à trois inconnues.

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz & = & d \\ a'x+b'y+c'z & = & d' \\ a''x+b''y+c''z & = & d'' \end{array}\right.$$

  avec $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ réels.

On appelle opérations élémentaires sur un système linéaire (S) de la forme ci-dessus les opérations suivantes :

1. permutation de deux lignes L_i et L_j : $L_i \leftrightarrow L_j$;
2. multiplication de la ligne L_i par λ : $L_i \leftarrow \lambda L_i$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$;
3. combinaison d'une autre ligne L_j à une ligne L_i $(i \neq j)$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 5

Soit (S) un système linéaire, alors tout système (S') obtenu à partir de (S) en faisant une suite finie d'opérations élémentaires est équivalent au système (S).

Attention aux opérations élémentaires simultanées : partant du système :

(S) $\left\{\begin{array}{rrrl} \frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & =1 \\ \frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}y & -\frac{1}{2}z & =0 \\ -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & =0 \end{array}\right.$, en faisant les opérations élémentaires simultanées : $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$, nous obtenons le système :

$(\mathrm{S}')\left\{\begin{array}{rrrl} & & z & =1 \\ x & & -z & =0 \\ -x & & & =-1 \end{array}\right.$ qui a pour solution $(1;\ 1;\ 1)$. Pourtant $(1;\ 1;\ 1)$ n'est pas solution de (S), donc (S) et (S') ne sont pas équivalents.

Grâce aux opérations élémentaires précédentes il est possible de ramener le système initial à un système plus simple qu'il sera alors possible de résoudre. Cette méthode s'appele la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 9

[-M 5 -] Soient x et y deux réels tels que $x \in [1;4]$ et $2 \leq y \leq 5$. Déterminer un encadrement le plus précis possible des expressions suivantes :

$$A = 2x - 3y\,; \quad B = (x-5)(2-y)\,; \quad C = x^2 - 4x + 4\,;$$

$$D = \frac{1}{y+3}\,; \qquad E = \frac{x+2}{y-1}.$$

Exercice 10

[-M 5 -] Montrer que

$$\forall (x;\ y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Exercice 11

[-M 6 -,-M 5 -] Résoudre l'inéquation $x^3 - 3x + 2 < 0$.

Exercice 12

[-M 8 -]
Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$, $(a;\ b) \in \mathbb{R}^2$; (b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$.

$\star \qquad \star \qquad \star$

$\star \qquad \star$

$\star$