Calcul algébrique réel

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

Plan

1. Rudiments de logique
   - Quantificateurs logiques et assertions
   - Implications et équivalences
   - Négation d'une assertion
   - Deux techniques de raisonnement utiles

2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations

3. Valeur absolue d'un nombre réel

1 Rudiments de logique
- Quantificateurs logiques et assertions
- Implications et équivalences
- Négation d'une assertion
- Deux techniques de raisonnement utiles

2 Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
- Relation d'ordre
- Factorisation d'expressions

3 Valeur absolue d'un nombre réel
- Définition et premières propriétés
- Inégalité triangulaire
- Exemples de résolutions d'équations avec plusieurs valeurs absolues

➩ Quantificateurs logiques :

On retiendra pour la suite les symboles suivants couramment utilisés en mathématiques :

- $\forall$ se lit « pour tout » ;
- $\exists$ se lit « il existe » ;
- / se lit « tel que ».

⇨ Quantificateurs logiques :

On retiendra pour la suite les symboles suivants couramment utilisés en mathématiques :

- $\forall$ se lit « pour tout » ;
- $\exists$ se lit « il existe » ;
- $/$ se lit « tel que ».

Exemples :

(1) « Le carré de tout réel est positif »s'écrit :

(2) « Il existe un réel tel que son inverse est négatif »s'écrit :

⇨ Quantificateurs logiques :

On retiendra pour la suite les symboles suivants couramment utilisés en mathématiques :

- $\forall$ se lit « pour tout » ;
- $\exists$ se lit « il existe » ;
- $/$ se lit « tel que ».

Exemples :

(1) « Le carré de tout réel est positif »s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$;

(2) « Il existe un réel tel que son inverse est négatif »s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} \geq 0;$

➪ Quantificateurs logiques :

On retiendra pour la suite les symboles suivants couramment utilisés en mathématiques :

- $\forall$ se lit « pour tout » ;
- $\exists$ se lit « il existe » ;
- $/$ se lit « tel que ».

Exemples :

(1) « Le carré de tout réel est positif »s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$;

(2) « Il existe un réel tel que son inverse est négatif »s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} \geq 0$;

(3) « La fonction f est constante de valeur 3 »s'écrit

➩ Quantificateurs logiques :

On retiendra pour la suite les symboles suivants couramment utilisés en mathématiques :

- $\forall$ se lit « pour tout » ;
- $\exists$ se lit « il existe » ;
- $/$ se lit « tel que ».

Exemples :

(1) « Le carré de tout réel est positif »s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$;

(2) « Il existe un réel tel que son inverse est négatif »s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x} \geq 0$;

(3) « La fonction f est constante de valeur 3 »s'écrit $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 3$.

Attention à l'ordre de ces quantificateurs dans nos énoncés mathématiques. Par exemples :

- Considérons E l'ensemble des épreuves lors des derniers jeux olympiques et les deux assertions suivantes :
  - $\ll$ Pour toute épreuve y, il existe un athlète x tel que l'athlète x a remporté l'épreuve y $\gg$;
  - $\ll$ Il existe un athlète x tel que pour toute épreuve y, l'athlète x a remporté l'épreuve y $\gg$

Attention à l'ordre de ces quantificateurs dans nos énoncés mathématiques. Par exemples :

- Considérons E l'ensemble des épreuves lors des derniers jeux olympiques et les deux assertions suivantes :
  - ≪ Pour toute épreuve y, il existe un athlète x tel que l'athlète x a remporté l'épreuve y ≫ ;
  - ≪ Il existe un athlète x tel que pour toute épreuve y, l'athlète x a remporté l'épreuve y ≫

  On comprend bien la nuance entre ces deux phrases : pour la première l'athlète qui remporte l'épreuve n'est pas le même selon l'épreuve alors que ce dernier ne change pas pour la deuxième. Ce principe est encore vrai pour les phrases mathématiques, c'est à dire que son sens change lorsqu'on intervertit les symbôles mathématiques : $\forall$ et $\exists$.

Attention à l'ordre de ces quantificateurs dans nos énoncés mathématiques. Par exemples :

- Considérons E l'ensemble des épreuves lors des derniers jeux olympiques et les deux assertions suivantes :
  - $\ll$ Pour toute épreuve y, il existe un athlète x tel que l'athlète x a remporté l'épreuve y $\gg$;
  - $\ll$ Il existe un athlète x tel que pour toute épreuve y, l'athlète x a remporté l'épreuve y $\gg$

  On comprend bien la nuance entre ces deux phrases : pour la première l'athlète qui remporte l'épreuve n'est pas le même selon l'épreuve alors que ce dernier ne change pas pour la deuxième. Ce principe est encore vrai pour les phrases mathématiques, c'est à dire que son sens change lorsqu'on intervertit les symbôles mathématiques : $\forall$ et $\exists$.

- Les énoncés :
  - $\ll \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} / n \leq x \gg$;
  - $\ll \exists n \in \mathbb{Z} / \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x \gg$

Attention à l'ordre de ces quantificateurs dans nos énoncés mathématiques. Par exemples :

- Considérons E l'ensemble des épreuves lors des derniers jeux olympiques et les deux assertions suivantes :
  - « Pour toute épreuve y, il existe un athlète x tel que l'athlète x a remporté l'épreuve y » ;
  - « Il existe un athlète x tel que pour toute épreuve y, l'athlète x a remporté l'épreuve y »

  On comprend bien la nuance entre ces deux phrases : pour la première l'athlète qui remporte l'épreuve n'est pas le même selon l'épreuve alors que ce dernier ne change pas pour la deuxième. Ce principe est encore vrai pour les phrases mathématiques, c'est à dire que son sens change lorsqu'on intervertit les symbôles mathématiques : $\forall$ et $\exists$.
- Les énoncés :
  - « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} / n \leq x$ » ;
  - « $\exists n \in \mathbb{Z} / \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x$ »

  sont différents. Le premier est toujours vrai (il suffit de prendre n'importe quel entier relatif plus petit que x) alors que le second est toujours faux (cela impliquerait que tous les nombres réels sont plus grands que n ! ! !).

➩ Assertions :

On peut toujours décider si un énoncé mathématique est vrai ou faux. Un énoncé mathématique est également appelé assertion ou proposition.

⇨ Assertions :

On peut toujours décider si un énoncé mathématique est vrai ou faux. Un énoncé mathématique est également appelé assertion ou proposition.

REMARQUE : Une équation ou une inéquation est une proposition $P(x)$ dépendant d'un réel x. L'ensemble des solutions est l'ensemble des nombres x pour lesquels la proposition $P(x)$ est vraie.

1. Rudiments de logique
   - Quantificateurs logiques et assertions
   - Implications et équivalences
   - Négation d'une assertion
   - Deux techniques de raisonnement utiles

2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
   - Relation d'ordre
   - Factorisation d'expressions

3. Valeur absolue d'un nombre réel
   - Définition et premières propriétés
   - Inégalité triangulaire
   - Exemples de résolutions d'équations avec plusieurs valeurs absolues

Définition :

Soient A et B deux assertions.

1. On dit que A implique B, et on note : $A \Rightarrow B$, lorsque B est vraie quand A est vraie ;

Définition :

Soient A et B deux assertions.

1. On dit que A implique B, et on note : $A \Rightarrow B$, lorsque B est vraie quand A est vraie ;
2. On dit que A et B sont équivalentes, et on note $A \Leftrightarrow B$, lorsque A implique B et B implique A.

Définition :

Soient A et B deux assertions.

1. On dit que A implique B, et on note : $A \Rightarrow B$, lorsque B est vraie quand A est vraie ;
2. On dit que A et B sont équivalentes, et on note $A \Leftrightarrow B$, lorsque A implique B et B implique A.

REMARQUE : En revanche nous n'avons pas $\overbrace{x^2 = 1}^{A} \Rightarrow \overbrace{x = 1}^{B}$

Définition :

Soient A et B deux assertions.

1. On dit que A implique B, et on note : $A \Rightarrow B$, lorsque B est vraie quand A est vraie ;
2. On dit que A et B sont équivalentes, et on note $A \Leftrightarrow B$, lorsque A implique B et B implique A.

REMARQUE : En revanche nous n'avons pas $\overbrace{x^2 = 1}^{A} \Rightarrow \overbrace{x = 1}^{B}$ puisque pour $x = -1$, A est vraie mais B est fausse.

Définition :

Soient A et B deux assertions.

1. On dit que A implique B, et on note : $A \Rightarrow B$, lorsque B est vraie quand A est vraie ;
2. On dit que A et B sont équivalentes, et on note $A \Leftrightarrow B$, lorsque A implique B et B implique A.

REMARQUE : En revanche nous n'avons pas $\overbrace{x^2 = 1}^{A} \Rightarrow \overbrace{x = 1}^{B}$ puisque pour $x = -1$, A est vraie mais B est fausse.

Exercice

Soit $a \geq 0, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b \geq 0 \text{ et } a = b^2$.

REMARQUE : Soient A et B deux équations (ou inéquations).

1. Si $A \Rightarrow B$

2. Si $A \Leftrightarrow B$

REMARQUE : Soient A et B deux équations (ou inéquations).

1. Si $A \Rightarrow B$, l'ensemble des solutions de A est inclus dans l'ensemble des solutions de B ;
2. Si $A \Leftrightarrow B$, l'ensemble des solutions de A et l'ensemble des solutions de B sont égaux.

REMARQUE : Soient A et B deux équations (ou inéquations).

1. Si $A \Rightarrow B$, l'ensemble des solutions de A est inclus dans l'ensemble des solutions de B ;
2. Si $A \Leftrightarrow B$, l'ensemble des solutions de A et l'ensemble des solutions de B sont égaux.

Exercice

Compléter, lorsque cela est possible, les pointillés par $\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$:

(a) $x^2 = x \dots x = 1$;

(b) $x \geq 1 \dots x \geq 2$;

(c) $x < 1 \dots x = 1$;

(d) $x + 3 \geq 4 \dots x \geq 1$;

REMARQUE : Supposons que $A \Rightarrow B$ soit vraie, avec A et B deux assertions. Alors,

REMARQUE : Supposons que $A \Rightarrow B$ soit vraie, avec A et B deux assertions. Alors,

1. on dit que A est une condition suffisante à B. Pour que B soit vraie, il suffit que A le soit.

REMARQUE : Supposons que $A \Rightarrow B$ soit vraie, avec A et B deux assertions. Alors,

1. on dit que A est une condition suffisante à B. Pour que B soit vraie, il suffit que A le soit.
2. on dit que B est une condition nécessaire à A.

1. Rudiments de logique
   - Quantificateurs logiques et assertions
   - Implications et équivalences
   - Négation d'une assertion
   - Deux techniques de raisonnement utiles
2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
   - Relation d'ordre
   - Factorisation d'expressions
3. Valeur absolue d'un nombre réel
   - Définition et premières propriétés
   - Inégalité triangulaire
   - Exemples de résolutions d'équations avec plusieurs valeurs absolues

Définition :

Si A est une assertion, on appelle négation de A, et on note $\neg A$, l'assertion qui est vraie quand A est fausse et fausse quand A est vraie.

Définition :

Si A est une assertion, on appelle négation de A, et on note $\neg A$, l'assertion qui est vraie quand A est fausse et fausse quand A est vraie.

Exercice

Donner les négations des propositions suivantes. Sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 \geq 1$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$.

1. Rudiments de logique
   - Quantificateurs logiques et assertions
   - Implications et équivalences
   - Négation d'une assertion
   - Deux techniques de raisonnement utiles

2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
   - Relation d'ordre
   - Factorisation d'expressions

3. Valeur absolue d'un nombre réel
   - Définition et premières propriétés
   - Inégalité triangulaire
   - Exemples de résolutions d'équations avec plusieurs valeurs absolues

⇨ Raisonnement par analyse-synthèse :

Exemple : Résolution de l'équation $\sqrt{x^2 - 3x} = 2 - x$.

⇨ Raisonnement par analyse-synthèse :

Exemple : Résolution de l'équation $\sqrt{x^2 - 3x} = 2 - x$.

Il faudra éviter de rédiger comme suit :

$$\sqrt{x^2 - 3x} = 2 - x \quad \Leftrightarrow x^2 - 3x = (2-x)^2$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 3x = 4 - 4x + \cancel{x^2}$$
$$\Leftrightarrow x = 4$$

➩ Raisonnement par analyse-synthèse :

Exemple : Résolution de l'équation $\sqrt{x^2-3x} = 2-x$.

Il faudra éviter de rédiger comme suit :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-3x} = 2-x \quad & \Leftrightarrow x^2-3x = (2-x)^2 \\ & \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 3x = 4 - 4x + \cancel{x^2} \\ & \Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

En effet, si l'on veut contrôler notre résultat, on constate que 4 n'est pas solution de l'équation : $\sqrt{x^2-3x} = 2-x$! !

➩ Raisonnement par analyse-synthèse :

Exemple : Résolution de l'équation $\sqrt{x^2-3x}=2-x$.

Il faudra éviter de rédiger comme suit :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-3x}=2-x \quad &\Leftrightarrow x^2-3x=(2-x)^2\\ &\Leftrightarrow \cancel{x^2}-3x=4-4x+\cancel{x^2}\\ &\Leftrightarrow x=4\end{aligned}$$

En effet, si l'on veut contrôler notre résultat, on constate que 4 n'est pas solution de l'équation : $\sqrt{x^2-3x}=2-x$! !

Le problème vient qu'en toute généralité $a=b$ n'est pas équivalente à $a^2=b^2$. Nous avons juste : $a=b\Rightarrow a^2=b^2$.

⇨ Raisonnement par disjonction des cas :

Exemple : Résolution de l'équation : $mx^2 + 2x + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

Plan

1. Rudiments de logique
2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
   - Relation d'ordre
   - Factorisation d'expressions
3. Valeur absolue d'un nombre réel

1. Rudiments de logique
   - Quantificateurs logiques et assertions
   - Implications et équivalences
   - Négation d'une assertion
   - Deux techniques de raisonnement utiles

2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
   - Relation d'ordre
   - Factorisation d'expressions

3. Valeur absolue d'un nombre réel
   - Définition et premières propriétés
   - Inégalité triangulaire
   - Exemples de résolutions d'équations avec plusieurs valeurs absolues

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous réels x, y, z tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (Transitivité) ;

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous réels x, y, z tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (Transitivité) ;
2. Pour tous réels x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (Anti-symétrie) ;

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous réels x, y, z tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (Transitivité) ;
2. Pour tous réels x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (Anti-symétrie) ;
3. Pour tout réel x, $x \leq x$ (Transitivité).

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous réels x, y, z tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (Transitivité) ;
2. Pour tous réels x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (Anti-symétrie) ;
3. Pour tout réel x, $x \leq x$ (Transitivité).

De plus, cette relation est totale. C'est à dire, pour tous réels x et y alors soit $x \leq y$ soit $y \leq x$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous réels x, y, z tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (Transitivité) ;
2. Pour tous réels x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (Anti-symétrie) ;
3. Pour tout réel x, $x \leq x$ (Transitivité).

De plus, cette relation est totale. C'est à dire, pour tous réels x et y alors soit $x \leq y$ soit $y \leq x$.

On rappelle que :

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous réels x, y, z tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (Transitivité) ;
2. Pour tous réels x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (Anti-symétrie) ;
3. Pour tout réel x, $x \leq x$ (Transitivité).

De plus, cette relation est totale. C'est à dire, pour tous réels x et y alors soit $x \leq y$ soit $y \leq x$.

On rappelle que :

➩ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un nombre positif

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous réels x, y, z tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (Transitivité) ;
2. Pour tous réels x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (Anti-symétrie) ;
3. Pour tout réel x, $x \leq x$ (Transitivité).

De plus, cette relation est totale. C'est à dire, pour tous réels x et y alors soit $x \leq y$ soit $y \leq x$.

On rappelle que :

➩ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un nombre positif, l'inégalité est inchangée ;

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous réels x, y, z tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (Transitivité) ;
2. Pour tous réels x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (Anti-symétrie) ;
3. Pour tout réel x, $x \leq x$ (Transitivité).

De plus, cette relation est totale. C'est à dire, pour tous réels x et y alors soit $x \leq y$ soit $y \leq x$.

On rappelle que :

➩ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un nombre positif, l'inégalité est inchangée ;

➩ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous réels x, y, z tels que $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ (Transitivité) ;
2. Pour tous réels x et y, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ (Anti-symétrie) ;
3. Pour tout réel x, $x \leq x$ (Transitivité).

De plus, cette relation est totale. C'est à dire, pour tous réels x et y alors soit $x \leq y$ soit $y \leq x$.

On rappelle que :

➩ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un nombre positif, l'inégalité est inchangée ;

➩ Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif, l'inégalité est renversée.

Proposition

Soient (a, b, x, y) quatre nombres réels.

Proposition

Soient (a, b, x, y) quatre nombres réels.

1. On peut additionner deux inégalités : Si $a \leq x$ et $b \leq y$, alors $a + b \leq x + y$;

Proposition

Soient (a, b, x, y) quatre nombres réels.

1. On peut additionner deux inégalités : Si $a \leq x$ et $b \leq y$, alors $a + b \leq x + y$;
2. On peut multiplier des inégalités dont les membres sont tous positifs : $0 \leq a \leq x$ et $0 \leq b \leq y$, alors : $ab \leq xy$.

Proposition

Soient (a, b, x, y) quatre nombres réels.

1. On peut additionner deux inégalités : Si $a \leq x$ et $b \leq y$, alors $a + b \leq x + y$;
2. On peut multiplier des inégalités dont les membres sont tous positifs : $0 \leq a \leq x$ et $0 \leq b \leq y$, alors : $ab \leq xy$.

Exercice

Montrer que

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x + \frac{1}{x} \geq 2$.

1. Rudiments de logique
   - Quantificateurs logiques et assertions
   - Implications et équivalences
   - Négation d'une assertion
   - Deux techniques de raisonnement utiles

2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
   - Relation d'ordre
   - Factorisation d'expressions

3. Valeur absolue d'un nombre réel
   - Définition et premières propriétés
   - Inégalité triangulaire
   - Exemples de résolutions d'équations avec plusieurs valeurs absolues

Factoriser une expression, c'est écrire cette dernière sous la forme d'un produit.

Factoriser une expression, c'est écrire cette dernière sous la forme d'un produit.
Pour factoriser, on utilisera très souvent les deux techniques suivantes :

➪ les identités remarquables :

$(a+b)^2 =$

$(a-b)^2 =$

$(a+b)(a-b) =$

Factoriser une expression, c'est écrire cette dernière sous la forme d'un produit.
Pour factoriser, on utilisera très souvent les deux techniques suivantes :

➩ les identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$

Factoriser une expression, c'est écrire cette dernière sous la forme d'un produit.
Pour factoriser, on utilisera très souvent les deux techniques suivantes :

➩ les identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$
$(a+b)^3 =$
$(a-b)^3 =$
$= a^3 - b^3;$
$= a^3 + b^3.$

Factoriser une expression, c'est écrire cette dernière sous la forme d'un produit.
Pour factoriser, on utilisera très souvent les deux techniques suivantes :

➩ les identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$
$(a-b)^3 =$

$= a^3 - b^3;$
$= a^3 + b^3.$

Factoriser une expression, c'est écrire cette dernière sous la forme d'un produit. Pour factoriser, on utilisera très souvent les deux techniques suivantes :

➩ les identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$= a^3 - b^3;$$
$$= a^3 + b^3.$$

Factoriser une expression, c'est écrire cette dernière sous la forme d'un produit. Pour factoriser, on utilisera très souvent les deux techniques suivantes :

➩ les identités remarquables :

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\\
&(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;\\
&(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;\\
&(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;\\
&(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;\\
&(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3;\\
& = a^3 + b^3.
\end{aligned}$$

Factoriser une expression, c'est écrire cette dernière sous la forme d'un produit. Pour factoriser, on utilisera très souvent les deux techniques suivantes :

➩ les identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3;$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3.$$

➩ la division euclidienne :

On appelle expression polynômiale (réelle) toute expression de la forme : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels quelconques et n est un entier naturel quelconque.

⇨ la division euclidienne :

On appelle expression polynômiale (réelle) toute expression de la forme : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels quelconques et n est un entier naturel quelconque.

Proposition

Si une expression polynômiale P s'annule pour une valeur α, alors P est factorisable par $x - \alpha$.

➩ la division euclidienne :

On appelle expression polynômiale (réelle) toute expression de la forme : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des réels quelconques et n est un entier naturel quelconque.

Proposition

Si une expression polynômiale P s'annule pour une valeur α, alors P est factorisable par $x - \alpha$.

Exercice

Résoudre l'inéquation $x^3 - 3x + 2 < 0$.

Plan

1. Rudiments de logique
2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
3. Valeur absolue d'un nombre réel
   - Définition et premières propriétés
   - Inégalité triangulaire
   - Exemples de résolutions d'équations avec plusieurs valeurs absolues

1. Rudiments de logique
   - Quantificateurs logiques et assertions
   - Implications et équivalences
   - Négation d'une assertion
   - Deux techniques de raisonnement utiles

2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
   - Relation d'ordre
   - Factorisation d'expressions

3. Valeur absolue d'un nombre réel
   - Définition et premières propriétés
   - Inégalité triangulaire
   - Exemples de résolutions d'équations avec plusieurs valeurs absolues

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, le nombre tel que : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$.

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, le nombre tel que : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$.

Exemples :

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, le nombre tel que : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$.

Exemples :

(1) $|3| = 3;$

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, le nombre tel que : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$.

Exemples :

(1) $|3| = 3;$

(2) $|-2| =$

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, le nombre tel que : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$.

Exemples :

(1) $|3| = 3;$

(2) $|-2| = 2;$

(3) $|x| = 1 \qquad x = 1.$

Définition :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, le nombre tel que : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$.

Exemples :

(1) $|3| = 3$;

(2) $|-2| = 2$;

(3) $|x| = 1 \qquad x = 1$.

Définition :

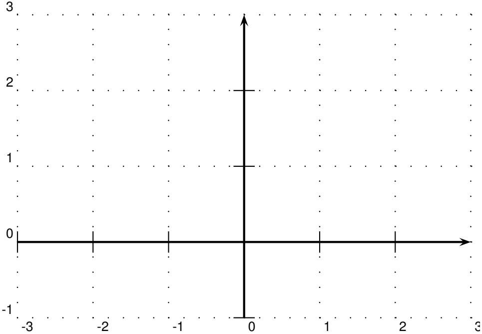
Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x, et on note $|x|$, le nombre tel que : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$.

Exemples :

(1) $|3| = 3$;

(2) $|-2| = 2$;

(3) $|x| = 1 \Leftarrow x = 1$.


3
2
1
0
-1
-3
-2
-1
0
1
2
3

Proposition

$\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $|x| = |-x|$;

Proposition

$\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $|x| = |-x|$;
2. $|xy| = |x||y|$

Proposition

$\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $|x| = |-x|$;
2. $|xy| = |x||y|$ et $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$, $(x \neq 0)$;

Proposition

$\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $|x| = |-x|$;
2. $|xy| = |x||y|$ et $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$, $(x \neq 0)$;
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Proposition

$\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2,$

1. $|x| = |-x|$;
2. $|xy| = |x||y|$ et $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$, $(x \neq 0)$;
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Plus généralement : $|x| = m \Leftrightarrow x = m$

Proposition

$\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $|x| = |-x|$;
2. $|xy| = |x||y|$ et $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$, $(x \neq 0)$;
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Plus généralement : $|x| = m \Leftrightarrow x = m$ ou $x = -m$ si $m \geq 0$;

Proposition

$\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $|x| = |-x|$;
2. $|xy| = |x||y|$ et $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$, $(x \neq 0)$;
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Plus généralement : $|x| = m \Leftrightarrow x = m$ ou $x = -m$ si $m \geq 0$;
4. Pour $m \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leq m \Leftrightarrow -m \leq x \leq m$.

Proposition

$\forall (x;\ y) \in \mathbb{R}^2$,

1. $|x| = |-x|$;
2. $|xy| = |x||y|$ et $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{|y|}{|x|}$, $(x \neq 0)$;
3. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Plus généralement : $|x| = m \Leftrightarrow x = m$ ou $x = -m$ si $m \geq 0$;
4. Pour $m \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leq m \Leftrightarrow -m \leq x \leq m$.

Exercice

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

(a) $|x+1| = 3$; (b) $|x-1| \leq 3$.

1. Rudiments de logique
   - Quantificateurs logiques et assertions
   - Implications et équivalences
   - Négation d'une assertion
   - Deux techniques de raisonnement utiles
2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
   - Relation d'ordre
   - Factorisation d'expressions
3. Valeur absolue d'un nombre réel
   - Définition et premières propriétés
   - Inégalité triangulaire
   - Exemples de résolutions d'équations avec plusieurs valeurs absolues

Proposition (Inégalité triangulaire)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \ |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Proposition (Inégalité triangulaire)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ |x+y| \leq |x| + |y|.$$

De plus, $|x+y| = |x| + |y|$ si et seulement si x et y sont de même signe.

1. Rudiments de logique
   - Quantificateurs logiques et assertions
   - Implications et équivalences
   - Négation d'une assertion
   - Deux techniques de raisonnement utiles

2. Manipulations d'inégalités et techniques de factorisations
   - Relation d'ordre
   - Factorisation d'expressions

3. Valeur absolue d'un nombre réel
   - Définition et premières propriétés
   - Inégalité triangulaire
   - Exemples de résolutions d'équations avec plusieurs valeurs absolues

⇨ Un premier exemple :

Proposition

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R},\ \ |a| = |b| \Leftrightarrow \qquad\qquad .$$

⇨ Un premier exemple :

Proposition

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R},\ \ |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b.$$

⇨ Un deuxième exemple :

Dans certaines situations plus délicates, on peut s'aider d'un tableau de signes, ce qui nous permet de faire apparaitre plus facilement tous les différents cas afin d'enlever les valeurs absolues.