Bijections et applications réciproques

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez savoir :

- M1 Étudier la bijectivité d'une application quelconque ;
- M2 Calculer l'application réciproque d'une application quelconque ;
- M3 Montrer la bijectivité d'une fonction réelle ;
- M4 Manipuler les fonctions trigonométriques réciproques.

Plan

Définition 1:

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est :

1. injective lorsque : $\forall (x;\ y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (tout élément de F admet au plus un antécédent) ;
2. surjective lorsque : $\forall y \in F, \exists x \in E\ /y = f(x)$ (tout élément de F admet au moins un antécédent) ;
3. bijective lorsque f est surjective et injective (tout élément de F admet exactement un antécédent).

On note $f : E \to F$, $y \in F$ et on regarde l'équation (E) (d'inconnue x) $f(x) = y$. Alors :

1. f est injective lorsque (E) admet une unique solution ou n'en a pas, et ce quel que soit $y \in F$.
2. f est surjective lorsque (E) admet une (ou plusieurs) solution quel que soit $y \in F$.
3. f est bijective lorsque (E) admet une unique solution, et ce quel que soit $y \in F$.

Proposition 1

$f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

➩ Définition et résultat fondamental :

Définition 2:

Soit $f : E \to F$. On appelle application réciproque de f, lorsqu'elle existe, et on note f^{-1}, l'application de F vers E et telle que :

$$\begin{array}{c} \forall y \in F, f \circ f^{-1}(y) = y \\ \forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = x \end{array}.$$

Théorème 1

Une application $f : E \to F$ admet une application réciproque si et seulement si elle est bijective.

conséquence :

Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est bijective. En effet, l'application réciproque associée à f^{-1} est f : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

⇨ Calcul pratique d'une application réciproque :

Pour calculer f^{-1}, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x. En effet :

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \ .$$

Ainsi, la solution x correspond à l'expression de f^{-1}.

Proposition 2

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f : E \to G$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f : E \to G$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f : E \to G$ est bijective. De plus : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 1

[-M1-M2-] On note $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n + 1$. En utilisant les définitions, détectez si l'application f est injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2

[-M1-M2-] Montrer que l'application $f : [-1;\ +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$ est bijective et calculer son application réciproque.

Exercice 3

[-M1-M2-] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $f((x,y)) = (x+y, x-y)$. Vérifier que f est bijective et donner l'expression de son application réciproque f^{-1}.

Exercice 4

[-M1-M2-] Dans le plan complexe, une rotation de centre O et d'angle θ admet-elle une application réciproque ? Si oui, quelle-est-elle ?

Plan

Théorème 2(de la bijection.)

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **strictement monotone** et **continue**.

1. f induit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$;
2. De plus, $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on détermine à partir du tableau de variations de f.

Proposition 3

Soit f une application admettant une application réciproque f^{-1}. Alors, la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition 4

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et strictement monotone sur I. Alors :

1. Si f est continue sur I, son application réciproque est continue sur $J = f(I)$.
2. Si f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et $\forall y \in J, \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Exercice 5

[-M3-] Montrer que f définie par $f(x) = \ln(x+1) - \ln(2x) - 1$ induit une bijection de $]0;\ +\infty[$, vers un ensemble que l'on précisera.

Plan

Définition 3:

La restriction de la fonction $\cos$ à l'intervalle $[0;\ \pi]$ est strictement décroissante et continue. Elle induit donc une bijection de $I = [0;\ \pi]$ vers $\cos(I) = [-1;\ 1]$. On appelle « arc cosinus », et on note Arcos, sa fonction réciproque associée, définie sur $[-1;\ 1]$.

conséquences :

1. $\forall y \in [-1;\ 1]$, l'équation $\cos(x) = y$ admet une unique solution $x \in [0;\ \pi]$. On note $x = \mathrm{Arcos}(y)$ cette solution.
2. $\forall x \in [0;\ \pi], \mathrm{Arcos}(\cos(x)) = x,\ \forall y \in [-1;\ 1], \cos(\mathrm{Arcos}(y)) = y$.

REMARQUE : Nous n'avons pas : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arcos}(\cos(x)) = x$. Par exemple : $\mathrm{Arcos}(\cos(2\pi)) = \mathrm{Arcos}(1) = 0$.

Proposition 5

La fonction Arcos est continue sur $[-1;\ 1]$, dérivable sur $]-1;\ 1[$ et $\forall x \in]-1;\ 1[$, $\text{Arcos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tableau de variations :

x	-1		0		1
$\text{Arcos}'(x)$	$\|$	$-$	-1	$-$	$\|$
Arcos	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Définition 4:

La restriction de la fonction $\sin$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est continue et strictement croissante. Elle induit donc une bijection de $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $\sin(I) = [-1;\ 1]$. On appelle « arc sinus », et on note Arcsin, sa fonction réciproque associée, définie sur $[-1, 1]$.

conséquences :

1. $\forall y \in [-1;\ 1]$, l'équation $\sin(x) = y$ admet une unique solution $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. On note $x = \mathrm{Arcsin}(y)$ cette solution.
2. $\forall x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right], \mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$, $\forall y \in [-1;\ 1], \sin(\mathrm{Arcsin}(y)) = y$.

REMARQUE : Nous n'avons pas : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$. Par exemple : $\mathrm{Arcsin}(\sin(2\pi)) = \mathrm{Arcsin}(0) = 0$.

Proposition 6

La fonction Arcsin est continue sur $[-1;\ 1]$, dérivable sur $]-1;\ 1[$ et $\forall x \in]-1;\ 1[, \mathrm{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tableau de variations :

x	-1		0		1
$\mathrm{Arcsin}'(x)$	$\Vert$	$+$	1	$+$	$\Vert$
Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Définition 5:

La restriction de la fonction $\tan$ à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante. Elle induit donc une bijection de $I = \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\tan(I) = \mathbb{R}$. On appelle « arc tangente »et on note Arctan sa fonction réciproque associée.

conséquences :

1. $\forall y \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(x) = y$ admet une unique solution $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$. On note $x = \mathrm{Arctan}(y)$ cette solution.
2. $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[, \mathrm{Arctan}(tan(x)) = x,\ \forall y \in \mathbb{R}, \tan(\mathrm{Arctan}(y)) = y.$

Proposition 7

La fonction Arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{Arctan}'(x)$		$+$	1	$+$	
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

Exercice 6

[-M4-] Montrer l'égalité : $\tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ pour $x \in [-1;\ 0[\cup]0;\ 1]$.

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$