

Applications linéaires

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

À l'issue de ce chapitre vous devez :

- MI1 Savoir déterminer l'expression d'une application est linéaire.
- MI2 Maîtriser le calcul algébrique entre endomorphismes.
- MI3 Calculer le noyau et l'image d'une application linéaire.
- MI4 Étudier l'injectivité et la surjectivité en dimension quelconque.
- MI5 Calculer le rang d'une application linéaire en dimension finie.
- MI6 Savoir simplifier l'étude en M4 dans le cadre de la dimension finie.
- MI7 Maîtriser la notion de projecteurs et de symétries d'un espace vectoriel quelconque.

On note E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Plan

1 Généralités

- Définition et premières propriétés
- Modes de définition d'une application linéaire
- Opérations entre applications linéaires
- Le cas particulier d'un endomorphisme
- Les exercices du jour

2 Noyau, image et équations linéaires

3 Bijectivité et applications linéaires

4 Rang d'une application linéaire

5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

Définition 1:

On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire lorsque pour tous vecteurs u, v de E et $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$:

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

- ❶ On note $\mathcal{L}(E; F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
- ❷ Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
(L'ensemble d'arrivée est l'ensemble $\mathbb{K}$.)

Proposition 1

- ❶ Soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$. Alors $f(0_E) = 0_F$.
- ❷ Soient $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $(u_1; \dots; u_n) \in E^n, (\lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(u_k).$$

⇒ Caractérisation par l'image d'une base :

Proposition 2

Soient E un espace vectoriel de dimension finie dont une base est $(e_1; \dots; e_n)$. Soient $f_1; \dots; f_n$ des vecteurs de F . Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E; F)$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, u(e_i) = f_i.$$

⇒ Caractérisation par ses restrictions sur deux sous-espaces supplémentaires :

Proposition 3

Soient E_1 et E_2 deux espaces supplémentaires de E . Soient $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f|_{E_1} = u_1$ et $f|_{E_2} = u_2$.

⇒ Somme de deux applications linéaires et multiplication par un scalaire :

On munit $\mathcal{L}(E, F)$ des deux opérations suivantes :

- *la loi de composition interne* soient $(f; g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$. Alors $f + g$ est l'application définie par : $\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$;
- *Une loi de composition externe* soient $(f; \lambda) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathbb{K}$. Alors $\forall x \in E, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Proposition 4

■ $\mathcal{L}(E, F)$ muni des opérations précédentes est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

REMARQUE : Le vecteur nul $0_{\mathcal{L}(E, F)}$ est donc ici l'application nulle, c'est à dire définie par $f(u) = 0$ pour tout $u \in E$.

⇒ Composition :

Proposition 5

Soient E, F, G trois sous-espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. La composée $g \circ f$ est une application linéaire.

⇒ Distributivité :

Proposition 6

Soient E, F, G trois sous-espaces vectoriels. Alors,

- ❶ Composition à droite. Soient $u \in \mathcal{L}(F, G); (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, u \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda u \circ f + \mu u \circ g$.
- ❷ Composition à gauche. Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(F, G); f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda u + \mu v) \circ f = \lambda u \circ f + \mu v \circ f$.

Ainsi : $(u + v) \circ (r + s) = u \circ r + u \circ s + v \circ r + v \circ s$.

Définition 2:

Un endomorphisme est une application linéaire de E dans lui même. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E dans E .

REMARQUES :

- ① Avec les endomorphismes, nous pouvons composer sans nous préoccuper des ensembles de départ et d'arrivée. En particulier, on note pour $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$u^0 = Id_E; u^1 = u; u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ termes}}.$$
- ② Plus généralement, u, v étant deux endomorphismes de E , la composée des deux applications linéaires $u \circ v$ se note également uv et est également un endomorphisme de E .

Proposition 7(Binôme de Newton)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv = vu$. Alors : $(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$

Pour résumer, la somme et la composition d'applications linéaires se manipulent comme on manipule la somme et le produit matriciel.

Exercice 1

[-M1-] Déterminer l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que : $f((1, 2)) = (1, 0)$ et $f((2, 1)) = (0, 1)$.

Exercice 2

[-M1-] Dans $\mathbb{R}^2$, soient : $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

- ❶ Montrer que : $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ et donner la décomposition de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en une somme de $u \in F$ et $v \in G$.
- ❷ Déterminer l'unique application linéaire f telle que :
 $\forall \vec{u} \in F, f(u) = u$ et $\forall v \in G, f(v) = -v$.
- ❸ Que vaut $f \circ f$? À quelle transformation du plan f fait-elle référence?

Exercice 3

[-M2-] On pose $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi : E \rightarrow E$ définie par : $\varphi(f) = f'$ pour $f \in E$.

- ❶ Montrer que φ est bien définie et que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
- ❷ Calculer : φ^2 puis $(\varphi - Id)^2$.

Plan

- 1 Généralités
- 2 Noyau, image et équations linéaires
 - Image directe d'un sous-espace vectoriel
 - Image d'une application linéaire
 - Noyau d'une application linéaire
 - Équations linéaires
 - Les exercices du jour
- 3 Bijectivité et applications linéaires
- 4 Rang d'une application linéaire
- 5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

Proposition 8(propriétés des applications linéaires)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si H est un sous-espace vectoriel de E , alors $f(H)$ est un sous-espace vectoriel de F ;

Définition 3:

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle : image de f , et on note $\text{Im}(f)$, l'ensemble :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{y \in F \mid y = f(x), x \in E\}.$$

REMARQUES :

- ❶ D'après la proposition précédente $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F ;
- ❷ Si $E = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors : $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

Définition 4:

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle : noyau de f , et on note $\text{Ker}(f)$, l'ensemble : $\text{Ker}(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$.

Proposition 9

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 5:

On dit que l'équation linéaire $f(x) = b$ est compatible lorsque $b \in \text{Im}(f)$ et incompatible sinon.

Proposition 10

Si (E) est compatible et x_0 est tel que : $f(x_0) = b$, alors toute solution x de (E) s'écrit : $x = x_H + x_0$, avec $x_H \in \text{Ker}(f)$.

Exercice 4

[-M3-] On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ d'expressions :

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y + z \end{pmatrix} \text{ et } g \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}$$

- ❶ Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$, $\text{Ker}(g)$, $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(g)$.
- ❷ Déterminer une base de $\text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(f \circ g)$.
- ❸ Montrer que : $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$.

Exercice 5

[-M3-] Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{ker}(f) \subset \text{ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Exercice 6

[-M3-] Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f((x; y; z)) = (2x + y + z; x + 2y + z; x + y + 2z)$$

et soit $F = \ker(f - Id)$, $G = \ker(f - 4Id)$.

- ❶ Donner une base de F et de G .
- ❷ Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Plan

- 1 Généralités
- 2 Noyau, image et équations linéaires
- 3 Bijektivité et applications linéaires
 - Caractérisation des applications linéaires injectives ou surjectives
 - Isomorphismes et automorphismes
 - Espaces vectoriels isomorphes
 - Les exercices du jour
- 4 Rang d'une application linéaire
- 5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

⇒ En dimension quelconque :

Proposition 11

Soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$. Alors

- ❶ f est injective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$;
- ❷ f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$.

⇒ Caractérisation lorsque E est de dimension finie. :

Définition 6:

Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$. On appelle image de $\mathcal{B}$ par f , et on note : $f(\mathcal{B})$, la famille de vecteurs de F telle que $f(\mathcal{B}) = (f(u_1), \dots, f(u_p))$.

REMARQUE : Soient E est de dimension finie et $\mathcal{B}$ est une base de E . alors : $\text{Im}(f) = \text{vect}(f(\mathcal{B}))$.

Proposition 12

Si $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ est une base de E , alors :

- ❶ f est surjective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est génératrice de F ;
- ❷ f est injective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est libre ;
- ❸ f est bijective si et seulement si $f(\mathcal{B})$ est une base de F .

Théorème 1

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Nous avons équivalence entre :

- (i) f est injective ;
- (ii) f est surjective ;
- (iii) f est bijective.

REMARQUES :

- ❶ Le résultat n'est pas vrai en dimension infinie. Par exemple :
 $\varphi : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ définie par : $\varphi(f) = f'$ avec $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est un endomorphisme surjectif mais non injectif. C'est d'ailleurs aussi une façon rigoureuse de démontrer que $C^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas de dimension finie ...
- ❷ Le théorème précédent se généralise bien évidemment au cas où $f : E \rightarrow F$ avec $\dim(E) = \dim(F)$ (la démonstration va rester exactement la même !)

Définition 7:

- ❶ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est un isomorphisme lorsque f est bijective.
- ❷ Si de plus $f \in \mathcal{L}(E)$ alors on dit que f est un automorphisme.
- ❸ On note $\text{Gl}(E)$ l'ensemble des automorphismes que l'on appelle également *groupe linéaire*.

Proposition 13

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ❶ Si u est un isomorphisme alors son application réciproque est un isomorphisme. L'application réciproque de u^{-1} est $u : (u^{-1})^{-1} = u$;
- ❷ Soit $v \in \mathcal{L}(F; G)$ un isomorphisme. Alors $v \circ u$ est un isomorphisme. L'application réciproque est alors $u^{-1} \circ v^{-1}$. est un isomorphisme.
- ❸ En particulier, $\mathcal{GL}(E)$ a une structure de groupe (et est appelé groupe linéaire) :
 - ❶ $\text{Id}_E \in \mathcal{GL}(E)$.
 - ❷ si $u \in \mathcal{GL}(E)$ alors $u^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$
 - ❸ si $u, v \in \mathcal{GL}(E)$ alors $v \circ u \in \mathcal{GL}(E)$.

Définition 8:

On dit que deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels sont isomorphes lorsqu'il existe un isomorphisme de E vers F .

Théorème 2(classification des espaces vectoriels de dimension finie)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.



conséquence :



En particulier, tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Exercice 7

[-M4-] On considère l'application $\varphi : \begin{cases} C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_{-1}^1 f(t) dt \end{cases}$

- ❶ Pourquoi φ est-elle bien définie ?
- ❷ Montrer que φ est linéaire.
- ❸ Étudier l'injectivité puis la surjectivité de φ .

Exercice 8

[-M6-] Montrer que l'application linéaire f suivante est un isomorphisme et déterminer f^{-1} .

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ qui à } (x, y) \text{ associe } \left(\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2} \right).$$

Exercice 9

[-M6-] Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0); P(1); P(2)) \end{array}$. Montrer que f est un isomorphisme. Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à 2 passant par les points de coordonnées $(0; 1); (1; 2); (2; 3)$.

Plan

- 1 Généralités
- 2 Noyau, image et équations linéaires
- 3 Bijectivité et applications linéaires
- 4 Rang d'une application linéaire
 - Généralités
 - Théorème du rang
 - Rang et composition
 - Les exercices du jour
- 5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

Définition 9:

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si $\text{Im}(f)$ est un espace vectoriel de dimension finie alors le rang de f , noté $\text{rg}(f)$, est la dimension de l'image de f : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

REMARQUE : Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors :

$$\text{rg}(u) = \text{rg}((u(e_1); \dots; u(e_n))).$$

Les deux notions à priori différentes de « rang » se rejoignent donc dans ce cas particulier !

Proposition 14

- ① Si E est de dimension finie, alors :
 - ① $\text{Im}(f)$ est de dimension finie et $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$.
 - ② f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E)$.
- ② Si F est de dimension finie, alors :
 - ① $\text{Im}(f)$ est de dimension finie et $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$.
 - ② f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$.

Proposition 15

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et H un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E . Alors f induit un isomorphisme de H vers $\text{Im}(f)$.

Théorème 3

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors $\dim(\text{ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$.

Proposition 16

Si $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$ sont deux applications linéaires, telles que $\text{Im}(u)$ et $\text{Im}(v)$ sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $\text{Im}(v \circ u)$ est de dimension finie et $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.



conséquence :

✂ Composer à droite ou à gauche par un isomorphisme ne change pas le rang.

Exercice 10

[-M5-] Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire, E de dimension finie et telle que f n'est pas l'application nulle. Quel est le rang de f ? Quelle est la dimension du noyau ?

Plan

- 1 Généralités
- 2 Noyau, image et équations linéaires
- 3 Bijectivité et applications linéaires
- 4 Rang d'une application linéaire
- 5 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel
 - Les homothéties
 - Les projecteurs
 - Les symétries
 - Les exercices du jour

Définition 10:

| $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in E, f(x) = \lambda x$.

Définition 11:

- Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E . Pour $x \in E$, nous avons donc une unique décomposition :

$$x = u + v, \text{ avec } \begin{cases} u \in F \\ v \in G \end{cases} ;$$

- L'application p de E dans E définie par $p(x) = u$ est appelée **projection** sur F parallèlement à G (On dit également que p est un **projecteur**).

Proposition 17

- ❶ Soit p un projecteur sur F parallèlement à G . Alors p est un endomorphisme et $p \circ p = p$. De plus, $F = \text{Im}(p)$ et $\ker(p) = G$.
- ❷ Réciproquement, si $p \in \mathcal{L}(E)$ **et** $p \circ p = p$, alors p est une projection sur $F = \text{Im}(p)$ et parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$.

Définition 12:

Soit $(E; +; \cdot)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E . Pour $x \in E$, nous avons donc une unique décomposition :

$$x = u + v, \text{ avec } \begin{cases} u \in F \\ v \in G \end{cases} ;$$

- L'application s de E dans E définie par $s(x) = u - v$ est appelée **symétrie** par rapport à F et parallèlement à G .

Proposition 18

- ❶ Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E , un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. Soit s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G . Alors l'application s est linéaire et $s \circ s = id_E$. De plus, $F = \text{Ker}(s - id)$ et $G = \text{Ker}(s + id)$.
- ❷ Réciproquement, si $s \in \mathcal{L}(E)$ **et** $s \circ s = id_E$, alors s est une symétrie par rapport à $F = \text{Ker}(s - id_E)$ et parallèlement à $G = \text{Ker}(s + id_E)$.

Exercice 11

[-M7-] Donner l'expression analytique de la projection sur la droite $(\mathcal{D}) : y = x$ parallèlement à $(\mathcal{D}') : x = 0$.

Exercice 12

[-M7-] On considère l'application linéaire $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$s \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -3x - 4y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$$

- ① Montrer que s est une symétrie.
- ② Déterminer ses éléments caractéristiques.