Applications et fonctions réciproques usuelles

Mathématiques PTSI

Lycée Déodat de Séverac

Plan

Définition :

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est :

1. injective lorsque : $\forall (x;\ y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ (tout élément de F admet au plus un antécédent) ;
2. surjective lorsque : $\forall y \in F, \exists x \in E\ /y = f(x)$ (tout élément de F admet au moins un antécédent) ;
3. bijective lorsque f est surjective et injective (tout élément de F admet exactement un antécédent).

On note $f : E \to F$, $y \in F$ et on regarde l'équation (E) (d'inconnue x) $f(x) = y$. Alors :

1. f est injective lorsque (E) admet une unique solution ou n'en a pas, et ce quel que soit $y \in F$.
2. f est surjective lorsque (E) admet une (ou plusieurs) solution(s) quel que soit $y \in F$.
3. f est bijective lorsque (E) admet une unique solution, et ce quel que soit $y \in F$.

Proposition

$f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

REMARQUE : En particulier, toute application $f : E \to F$ induit une surjection de E vers $f(E)$.

Exercice

On note $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les antécédents de 3.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Déduire $f(\mathbb{R}^*)$ de l'étude ci-dessus.

➩ <u>définition et résultat fondamental :</u>

Définition :

Soit $f : E \to F$. On appelle application réciproque de f, lorqu'elle existe, et on note f^{-1}, l'application de F vers E et telle que :

$$\begin{array}{c} \forall y \in F, f \circ f^{-1}(y) = y \\ \forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = x \end{array}.$$

Théorème

Une application $f : E \to F$ admet une application réciproque si et seulement si elle est bijective.

conséquence :

Si $f : E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} : F \to E$ est bijective. En effet, l'application réciproque associée à f^{-1} est f : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

⇨ calcul pratique d'une application réciproque :

Méthode : Pour calculer f^{-1}, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x. En effet :

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \text{ car } f^{-1} \text{ est injective} \\ &\Leftrightarrow f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ car } f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \text{ et } \mathrm{id}_E(x) = x. \end{aligned}$$

Ainsi, la solution x correspond à l'expression de f^{-1}.

Exercice

Montrer que l'application $f : [-1;\ +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$ est bijective et calculer son application réciproque.

Proposition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Si f et g sont injectives alors $g \circ f : E \to G$ est injective.
2. Si f et g sont surjectives alors $g \circ f : E \to G$ est surjective.
3. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f : E \to G$ est bijective.
   De plus $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Plan

Théorème (de la bijection.)

Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **strictement monotone** et **continue**.

1. f induit une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$;
2. De plus, $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on détermine à partir du tableau de variations de f.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, $f(\mathbb{R})$ n'est pas forcément un intervalle. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) =]-\infty;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$ (ce qui est différent de $]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x);\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$).

Proposition

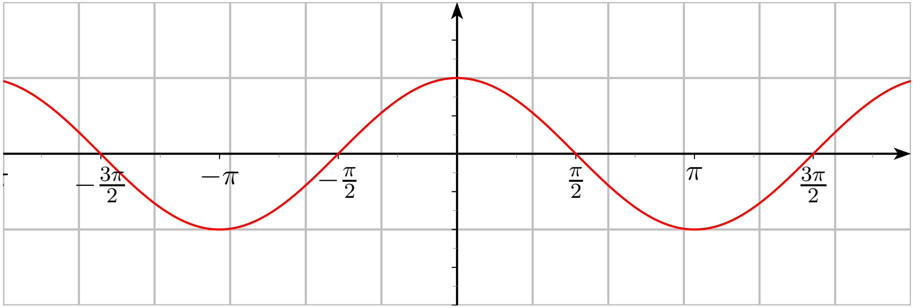
Soit f une application admettant une application réciproque f^{-1}. Alors, la courbe représentative de f^{-1} est le symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Proposition

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et strictement monotone sur I. Alors :

1. Si f est continue sur I, son application réciproque est continue sur $J = f(I)$.
2. Si f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et $\forall x \in J, \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Plan



Définition :

La restriction de la fonction $\cos$ à l'intervalle $[0;\ \pi]$ est strictement décroissante et continue. Elle induit donc une bijection de $I = [0;\ \pi]$ vers $\cos(I) = [-1;\ 1]$. On appelle « arc cosinus », et on note Arcos, sa fonction réciproque associée, définie sur $[-1;\ 1]$.

Proposition

La fonction Arcos est continue sur $[-1;\ 1]$, dérivable sur $]-1;\ 1[$ et $\forall x \in\ ]-1;\ 1[, \mathrm{Arcos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tableau de variations :

x	-1		0		1
$\mathrm{Arcos}'(x)$	$\Vert$	$-$	-1	$-$	$\Vert$
Arcos	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

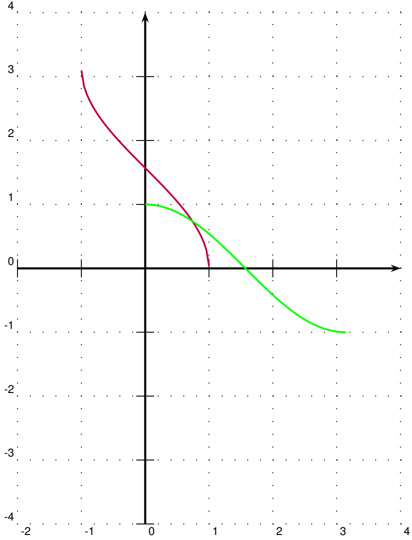
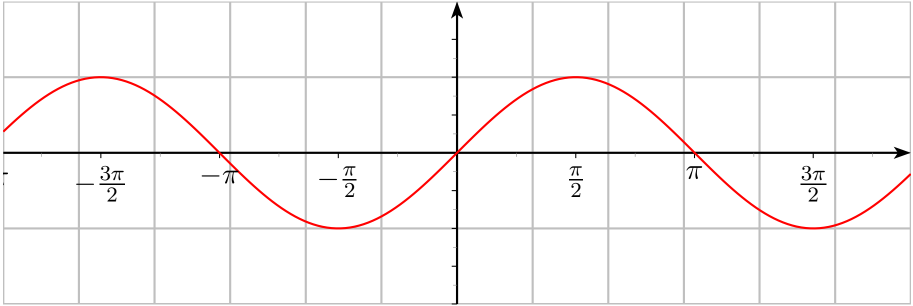


FIGURE 1 – Courbes représentatives des fonctions arcos (violet) et cos (vert).



Définition :

La restriction de la fonction $\sin$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ est continue et strictement croissante. Elle induit donc une bijection de $I = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ vers $\sin(I) = [-1;\ 1]$. On appelle « arc sinus », et on note Arcsin, sa fonction réciproque associée, définie sur $[-1;\ 1]$.

REMARQUE : Nous avons donc :
$\forall x \in [-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}], \mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x,\ \forall y \in [-1;\ 1], \sin(\mathrm{Arcsin}(y)) = y.$

Proposition

La fonction Arcsin est continue sur $[-1;\ 1]$, dérivable sur $]-1;\ 1[$ et $\forall x \in]-1;\ 1[, \mathrm{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Tableau de variations :

x	-1		0		1
$\mathrm{Arcsin}'(x)$	$\Vert$	$+$	1	$+$	$\Vert$
Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

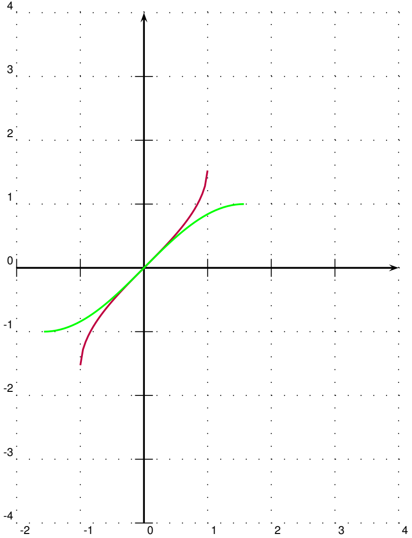


FIGURE 1 – Courbes représentatives des fonctions arcsin (violet) et sin (vert).

REMARQUE : La fonction Arcsin est impaire.

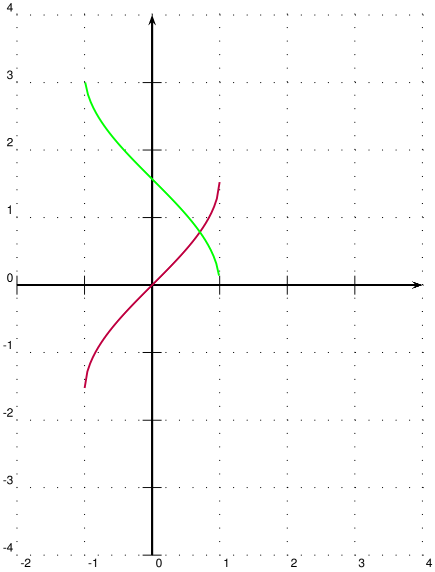
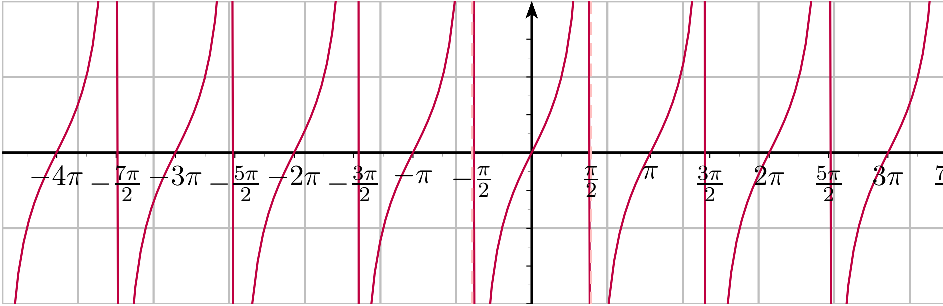


FIGURE 1 – Courbes représentatives des fonctions Arcsin (violet) et Arcos (vert).



Définition :

La restriction de la fonction $\tan$ à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ est continue et strictement croissante. Elle induit donc une bijection de $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\tan(I) = \mathbb{R}$. On appelle « arc tangente »et on note Arctan sa fonction réciproque associée.

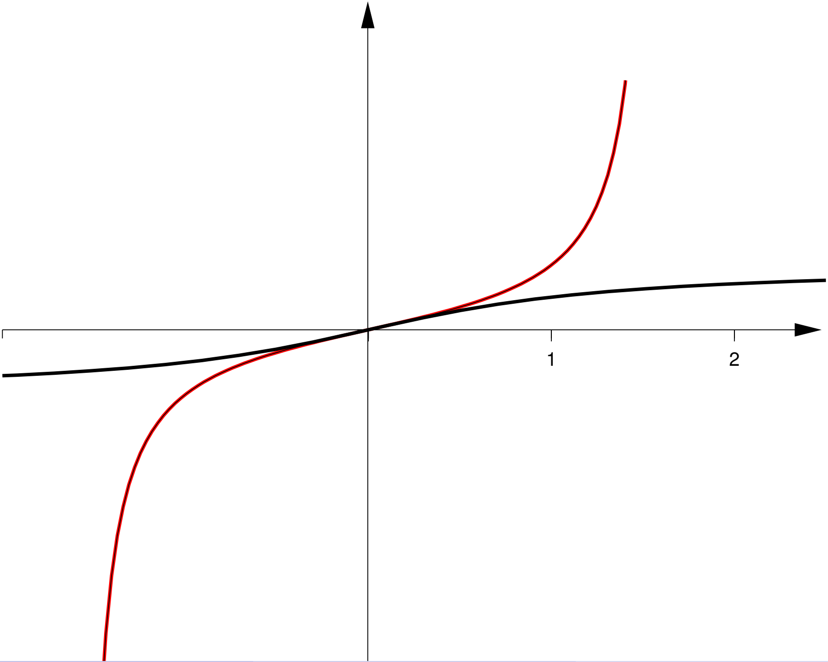
REMARQUE : Nous avons donc :
$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x, \ \forall y \in \mathbb{R}, \tan(\mathrm{Arctan}(y)) = y$.

Proposition

La fonction Arctan est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{Arctan}'(x)$		$+$	1	$+$	
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$


1
2

REMARQUES :

(1) La fonction Arctan est impaire ;

(2) La courbe représentative de Arctan admet deux asymptotes horizontales d'équations respectives $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$.

(3) Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*, a \neq 0$. Alors on peut obtenir un argument de ce nombre à l'aide de la fonction Arctan. En effet,
$\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} ; \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ainsi :
$\tan(\theta) = b/a \Leftrightarrow \theta = \operatorname{Arctan}(b/a)\ [\pi]$.