TD 3

Trigonométrie

Exercice 1 : Calculer les valeurs suivantes :

(a) $\cos\left(\frac{145\pi}{6}\right)$; (b) $\tan\left(\frac{227\pi}{3}\right)$; (c) $\sin\left(\frac{-91\pi}{4}\right)$.

Exercice 2 : Calculer $\sin(\theta)$ sachant que $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$.

Exercice 3 : [corrigé] Résoudre les équations suivantes :

(a) $\sin(2x) = \sin(x)$; (b) $\cos(x) = \sin(3x)$;

(c) $\sin(x) = -\cos(x)$; (d) $\tan(3x - \pi/2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

(e) $\sin(2x)(\sqrt{3} + 2\sin(2x)) = 0$; (f) $\cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0$;

(g) $\cos(2x) - 3\cos(x) = -2$; (h) $\cos(2x) - \sin(x) = 1$;

(i) $1 + \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(4x) = 0$; (j) $\sqrt{3}\tan(x) + 4\sin^2(x) = 0$;

(k) $\sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x)$; (l) $6\cos(2x) - 1 = 6\tan^2(x)$.

Exercice 4 : [indications] Résoudre l'équation : $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$.

Exercice 5 : [solutions] Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\sin(2x) \geq \sin(x)$;

(c) $\cos(2x) < \cos(x)$; (d) $\cos(x) > \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;

(e) $\tan(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$; (f) $\sqrt{3}\sin(x) - \cos(x) \geq 0$.

Exercice 6 : [indications] [solutions] Soient a, b, c trois réels positifs tels que : $a + b + c = \pi$, $\cos(a) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ et $\sin(b)\sin(c) = \frac{\sqrt{10}}{10}$. Calculer :

(a) $\sin(b+c)$, $\cos(b+c)$, $\tan(b+c)$;

(b) $\cos(b)\cos(c)$ et $\tan(b)\tan(c)$;

(c) $\tan(b)$ et $\tan(c)$ sachant que $c \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 7 : [corrigé] **Résolution d'une équation avec une tangente et un sinus**

(Q 1) Pour quelles valeurs de θ les termes de cette équation sont-ils définis ?

$$\sin(2\theta) = \frac{1}{2}\tan(\theta) \quad (*)$$

Dans toute la suite, nous prenons des réels θ le vérifiant.

(Q 2) Montrer que pour tout réel x : $\sin(2x) = 2\frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$.

(Q 3) Finalement, résoudre $(*)$.

Exercice 8 : [corrigé] Calcul de la tangente de $5\pi/12$.

(Q 1) Méthode 1. En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer $\tan(5\pi/12)$.

(Q 2) Méthode 2. Avec une équation.

(a) Résoudre l'équation : $\tan(x - \dfrac{\pi}{3}) = \tan(\dfrac{\pi}{2} - x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

(b) Exprimer $\tan(x - \dfrac{\pi}{3})$ en fonction de $\tan(x)$ puis $\tan(\dfrac{\pi}{2} - x)$ en fonction de $\tan(x)$.

(c) On pose $\alpha = \tan(\dfrac{5\pi}{12})$. En vous aidant des deux questions précédentes, montrer que α est solution de $X^2 - 2\sqrt{3}X - 1 = 0$.

(d) Résoudre cette dernière équation et en déduire la valeur de α.

Exercice 9 : [corrigé]

Un golfeur frappe une balle, assimilée à un objet ponctuel de masse m situé en l'origine du repère, avec une vitesse v_0. On cherche à déterminer l'angle de tir $\alpha_0 \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ qui permette d'amener la balle le plus loin possible et d'évaluer la distance pour laquelle la balle retouche le sol. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, nous obtenons le système d'équation :

$$\begin{cases} x = v_0\cos(\alpha)t \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t \end{cases}.$$

(a) Exprimer y en fonction de x.

(b) Exprimer simplement en fonction de α, v_0 et g la valeur de $x \neq 0$ pour laquelle $y = 0$. En déduire α_0 puis la valeur de x_0 correspondante.

Indications

Exercice 4 : On se ramène, via un changement de variable, à l'équation $X^4 - 2X^2 = 0$.

Exercice 6 :

(a) $\sin(b+c) = \sin(a)$. Or, nous connaissons $\cos(a)$ et on sait que $a \in [0;\ \pi]$, puisque $a+b+c = \pi$ et a, b, c positifs. De la même façon, connaissant $\sin(b+c)$, on en déduit $\cos(b+c)$, donc $\tan(b+c)$.

(b) On connaît $\cos(b+c)$ et $\sin(b)\sin(c)$, on en déduit donc la valeur de $\cos(b)\cos(c)$. En faisant le quotient de $\sin(b)\sin(c)$ et $\cos(b)\cos(c)$, on en déduit la valeur de $\tan(b)\tan(c)$.

(c) On déduit de la formule précédente et de $\tan(b+c)$ la valeur de $S = \tan(b) + \tan(c)$. On connaît de plus la valeur de $P = \tan(b)\tan(c)$, donc $\tan(b)$ et $\tan(c)$ sont solutions de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$.

Solution de l'exercice 5 :

(a) $\cup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi]$

(b) $\cup_{k\in\mathbb{Z}}\Big([2k\pi;\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi] \cup [\pi + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi]\Big)$

(c) $\cup_{k\in\mathbb{Z}}\Big(]0 + 2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi[\cup]\frac{4\pi}{3} + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi[\Big)$

(d) $\cup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{13\pi}{12} + 2k\pi;\ \frac{25\pi}{12} + 2k\pi[$.

(e) $\cup_{k\in\mathbb{Z}}] - \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{6} + k\pi[$.

(f) $\cup_{k\in\mathbb{Z}}[\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi]$.

Solution de l'exercice 6 :

(a) $\sin(b+c) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}, \cos(b+c) = -\frac{3\sqrt{10}}{10}, \tan(b+c) = -\frac{1}{3}$

(b) $\cos(b)\cos(c) = -\frac{2}{\sqrt{10}}, \tan(b)\tan(c) = -\frac{1}{2}$

(c) $\tan(c) = 1, \tan(b) = -\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 :

(a) Voir le cours : $S = \left\{0\ [2\pi];\ \frac{\pi}{3}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]\right\}$.

(b) Puisque : $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$, nous nous ramenons à l'équation :

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(3x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\pi}{2} + x = 3x\ [2\pi] \text{ ou } \frac{\pi}{2} + x = \pi - 3x\ [2\pi] \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{x = \frac{\pi}{4}\ [\pi] \text{ ou } x = \frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{2}\right].} \end{aligned}$$

(c) On se ramène aux équations classiques de la forme $\sin(a) = \sin(b)$ car $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\cos(x)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \sin(x) = -\cos(x) \\ \Leftrightarrow\ & \sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{2} + x\ [2\pi] \text{ ou } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{2} + x\right)\ [2\pi] \\ \Leftrightarrow\ & x = \pi + \frac{\pi}{2} - x\ [2\pi] \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{x = \frac{3\pi}{4}\ [\pi].} \end{aligned}$$

(d) On se ramène aux équations de la forme $\tan(a) = \tan(b)$ car $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ (Voir le cours pour plus de détails). $\boxed{S = \left\{\dfrac{2\pi}{9}\ \left[\dfrac{\pi}{3}\right]\right\}.}$

(e)
$$\begin{aligned} & \sin(2x)(\sqrt{3} + 2\sin(2x)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin(2x) = 0 \text{ ou } \sqrt{3} + 2\sin(2x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2x = 0\ [\pi] \text{ ou } \sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\ & x = 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } 2x = \pi + \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{x = 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6}\ [\pi] \text{ ou } x = \frac{2\pi}{9}\ [\pi].} \end{aligned}$$

(f) Le changement de variable : $X = \cos(x)$ nous ramène à l'équation : $X^2 - \dfrac{3}{2}X + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = \dfrac{1}{2}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \cos^2(x) - \frac{3}{2}\cos(x) + \frac{1}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \cos(x) = 1 \text{ ou } \cos(x) = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{x = 0\ [2\pi] \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi].} \end{aligned}$$

(g) Utiliser le formulaire de trigonométrie afin d'obtenir une expression contenant uniquement $\cos(x)$. On se ramène alors à l'équation (f).

(h) Utiliser le formulaire de trigonométrie afin d'obtenir une expression contenant uniquement $\sin(x)$.
$S = \left\{0\ [\pi];\ \frac{-\pi}{6}\ [2\pi];\ \frac{7\pi}{6}\ [2\pi]\right\}$

(i) Utiliser le formulaire de trigonométrie afin d'obtenir une expression contenant uniquement $\sin(2x)$. On se ramène à l'équation (e). $S = \{0[\frac{\pi}{2}];\ \frac{-\pi}{6}[2\pi];\ \frac{2\pi}{3}[\pi]\}$.

(j) On précise pour quelles valeurs de x les termes sont définis. Puis, on remplace $\tan(x)$ par $\sin(x)/\cos(x)$.
$S = \left\{0\ [\pi];\ \frac{-\pi}{6}\ [\pi];\ \frac{2\pi}{3}\ [\pi]\right\}$

(k) On transforme la somme de deux sinus en un produit.
$S = \left\{0\ \left[\frac{\pi}{4}\right];\ \frac{\pi}{6}\ [\pi];\ -\frac{\pi}{6}\ [\pi]\right\}$,

(l) L'équation a un sens si et seulement si $x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. Pour ces valeurs, nous ramenons alors l'équation à :

$$\begin{aligned} & 6\frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)} - 1 = 6\tan^2(x) \\ \Leftrightarrow\ & 6 - 6\tan^2(x) - (1 + \tan^2(x)) = 6\tan^2(x)(1 + \tan^2(x)) \\ \Leftrightarrow\ & 6\tan^4(x) + 13\tan^2(x) - 5 = 0. \end{aligned}$$

En posant alors $X = \tan^2(x)$, nous nous ramenons à l'équation : $6X^2 + 13X - 5 = 0 \Leftrightarrow X = \dfrac{1}{3}$ ou $X = -\dfrac{5}{2}$.
Ainsi :

$$
\begin{aligned}
& 6\tan^4(x)+13\tan^2(x)-5=0\\
\Leftrightarrow\ & \tan^2(x)=\frac{1}{3} \text{ ou } \tan^2(x)=-\frac{5}{2}\\
\Leftrightarrow\ & \tan^2(x)=\frac{1}{3}\\
\Leftrightarrow\ & \tan(x)=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } \tan(x)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\\
\Leftrightarrow\ & \tan(x)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ ou } \tan(x)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\
\Leftrightarrow\ & x=\frac{\pi}{6}\ [\pi] \text{ ou } x=-\frac{\pi}{6}\ [\pi].
\end{aligned}
$$

Il reste à vérifier que les valeurs interdites ne sont jamais atteintes dans les solutions obtenues à l'instant, ce qui permet de dire que toutes ces dernières sont solution de l'équation initiale. Ainsi :

$$\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{6}\ [\pi]\,;\ \frac{\pi}{6}\ [\pi]\right\}.}$$

Correction de l'exercice 7 :

(Q 1) Par définition, de la fonction tangente, les termes de l'expression sont définis lorsque $\theta\in\mathbb{R}-\{\frac{\pi}{2}[\pi]\}$.

(Q 2)

$$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)=2\tan(x)\cos^2(x)=\boxed{\frac{2\tan(x}{1+\tan^2(}}$$

(Q 3) Soit $x\in\mathbb{R}-\{\pi/2[\pi]\}$.

$$
\begin{aligned}
\sin(2\theta)=\tfrac{1}{2}\tan(\theta) &\Leftrightarrow \tfrac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}=\tan(\theta)\\
&\Leftrightarrow \tan(\theta)\times\tfrac{4-[1+\tan^2(\theta)]}{2[1+\tan^2(\theta)]}=0\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\tan(\theta)&=&0\\ \tan^2(\theta)&=&3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\tan\\ \tan\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\theta&=&0[\pi]\\ \theta&=&\frac{\pi}{3}[\pi]\\ \theta&=&-\frac{\pi}{3}[\pi]\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Finalement, ces nombres sont différents de $\frac{\pi}{2}[\pi]$. Par conséquent, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{0[\pi];\pm\frac{\pi}{3}[\pi]\right\}}$$

Correction de l'exercice 8 :

(Q 1) Méthode 1. A l'aide du cercle trigonométrique, on a : $\tan(2\pi/3)=\tan(-\pi/3)=-\sqrt{3}$ et $\tan(\pi/4)=1$. Puis, on utilise la formule sur $\tan(a-b)$:

$$
\begin{aligned}
\tan(\tfrac{2\pi}{3}-\tfrac{\pi}{4}) &= \frac{\tan(2\pi/3)-\tan(\pi/4)}{1+\tan(2\pi/3)\tan(\pi/4)}=\frac{-\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}}\\
&= \tfrac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\tfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=\boxed{2+\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

(Q 2) Méthode 2.

(a) Les termes de l'équation sont définis si et seulement si x est différent de 0 modulo π et $x-\dfrac{\pi}{3}$ est différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π, soit x différent de $\frac{5\pi}{6}$ modulo π.
Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi;\frac{5\pi}{6}+k\pi\backslash k\in\mathbb{Z}\}$. Par propriété,

$$
\begin{aligned}
\tan(x-\frac{\pi}{3})=\tan(\frac{\pi}{2}-x) &\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-x[\pi]\\
&\Leftrightarrow 2x=\frac{5\pi}{6}[\pi]\\
&\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}[\frac{\pi}{2}]
\end{aligned}
$$

L'ensemble de ces nombres appartenant bien à l'ensemble de définition des termes de l'équation, on en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est}}$

(b) D'une part :

$$\tan(x-\frac{\pi}{3})=\frac{\tan(x)-\tan(\frac{\pi}{3})}{1+\tan(x)\tan(\frac{\pi}{3})}=\frac{\tan(x)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan(x)}$$

D'autre part : $\tan(\dfrac{\pi}{2}-x)=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}=\dfrac{1}{\tan(x)}$.

(c) Soit $x=\dfrac{5\pi}{12}$ qui est solution de l'équation de $(Q1)$.

$$
\begin{aligned}
\tan(x-\frac{\pi}{3})=\tan(\frac{\pi}{2}-x) &\Leftrightarrow \tfrac{\tan(x)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan(x)}=\frac{1}{\tan(x)}\\
&\Leftrightarrow \left(\tan(x)-\sqrt{3}\right)\tan(x)=\\
&\Leftrightarrow \tan^2(x)-2\sqrt{3}\tan(x)-
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Finalement, on a montré que } \alpha=\tan(\tfrac{5\pi}{12}) \text{ est solution de}}$

(d) Le discriminant du précédent trinôme est $(2\sqrt{3})^2-4(-1)=16$. Les solutions de l'équation précédente sont $\sqrt{3}-2$ et $\sqrt{3}+2$. Or $\sqrt{3}-2<0$ (car $3<4$ et la fonction racine carrée est strictement croissante) et $\tan(\frac{5\pi}{12})$ est positif. Seule la deuxième racine convient.

$\boxed{\text{Finalement } \tan(\tfrac{5\pi}{12})=\sqrt{3}+2}$

Correction de l'exercice 9 :

(a)

$$
\left\{\begin{array}{l} x=v_0\cos(\alpha)t\\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_0\sin(\alpha)t\end{array}\right. .
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=\frac{x}{v_0\cos(\alpha)} \text{ car } \cos(\alpha)\neq 0\\ y=-\dfrac{1}{2}g\Big(\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}\Big)^2+v_0\sin(\alpha)\times\frac{x}{v_0\cos(\alpha)}\end{array}\right. .
$$

$$
\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=\frac{x}{v_0\cos(\alpha)} \text{ car } \cos(\alpha)\neq 0\\ \boxed{y=-\dfrac{1}{2}g\dfrac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)}+\tan(\alpha)x}\end{array}\right. .
$$

(b) On résout : $y=0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)}+\tan(\alpha)x=0$.
On la ramène à une équation produit nulle. Ainsi, $y=$

$0 \Leftrightarrow x\Big(-\dfrac{1}{2}g\frac{x}{v_0^2\cos^2(\alpha)}+\tan(\alpha)\Big)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $-\dfrac{1}{2}g\frac{x}{v_0^2\cos^2(\alpha)}+\tan(\alpha)=0$. La valeur de x non nulle telle que $y=0$ est :

$$x=\frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)\tan(\alpha)}{2g}=\frac{2v_0^2\cos^2(\alpha)\sin(\alpha)}{g\cos(\alpha)}=\boxed{\frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}}$$

en utilisant la formule de duplication. Le maximum de la fonction : $\begin{array}{ccc}]0;\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & \sin(2\alpha)\end{array}$ est atteint en $\pi/4$ et est égale à 1. Finalement, l'angle de tir $\alpha_0 \in \Big]0;\ \dfrac{\pi}{2}\Big[$ qui permette d'amener la balle le plus loin possible est $\pi/4$ et la distance à laquelle la balle retombe sur le sol est $x=\boxed{\dfrac{v_0^2}{g}}$.