TD 25

Intégration

Exercice 1 : Quelques souvenirs. Calculer :

(Q 1) $I = \int_0^1 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,dt$ en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

(Q 2) $J = \int_0^1 \frac{1}{t^2-t-6}\,dt$ en effectuant une DES.

(Q 3) $K = \int_0^1 \frac{1}{t^2-3t+3}\,dt$

(Q 4) $K_1 = \int_0^1 \frac{t^2-3t}{t^2-3t+3}\,dt$

(Q 5) $L = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \frac{\ln(x)}{x^n}\,dx$ en effectuant une IPP, avec $n \geq 2$.

Exercice 2 : Soit Ψ l'application définie par

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (a;b) & \mapsto & \int_0^1 \frac{ax+b}{(x+1)(x-2)}\,dx \end{array}.$$

(Q 1) Démontrer que Ψ est linéaire.

(Q 2) On pose $u = (1;1)$ et $v = (1;-2)$. Démontrer que $(u;v)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$ et donc une base de cet espace vectoriel.

(Q 3) Calculer $\Psi(u)$ et $\Psi(v)$.

(Q 4) Expliciter alors la valeur de $\Psi(a;b)$ pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : [corrigé] Soit $n \in \mathbb{N}$.

(Q 1) Calculer : $\int_0^1 t^k\,dt$ avec $k \in \{0;\cdots;n\}$.

(Q 2) Donner sous la forme d'une puissance : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$.

(Q 3) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercice 4 : [corrigé] Soit $f : [0,1] \to \boxed{[0,1]}$ continue et non nulle telle que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f^2(x)\,dx \quad \text{où } f^2 = f \times f.$$

Montrer que $f = 1$.

Exercice 5 : [corrigé] ⚠ **(lemme de Riemann-Lebesgue)** Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a;\ b]$.
À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$.

Exercice 6 : [corrigé] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

(Q 1) En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(Q 2) Calculer $I_{k-1} + I_k$.

(Q 3) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x+n} dx$. Déterminer la limite de (u_n) puis un équivalent. Pour ce dernier, on pourra effectuer une intégration par parties et afin d'obtenir une expression du type $u_n = v_n + o(v_n)$.

Exercice 8 : [corrigé] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\, dt$.

(Q 1) Montrer, à l'aide d'encadrements, que : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(Q 2) Calculer I_0.

(Q 3) Donner une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

(Q 4) On pose $W_n = \dfrac{I_n}{n!}$ pour tout entier n.

(a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, W_k - W_{k-1} = -\dfrac{1}{e \times k!}$.

(b) En déduire $W_n = 1 - \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

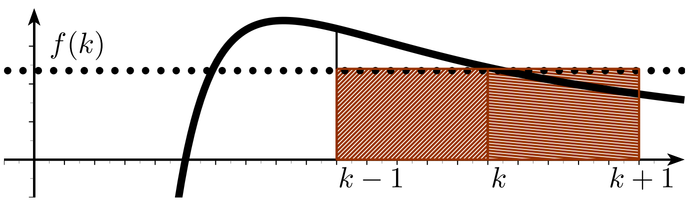
(c) En déduire que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

Exercice 9 : [corrigé] Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

(Q 1) Vérifier que f est décroissante sur $[2;+\infty[$.

(Q 2) Après avoir interprété graphiquement l'inégalité suivante, montrer que $\forall k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$$



(Q 3) Soit la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k^2}$$

avec $n \geq 3$.

(a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 3}$ est croissante.

(b) Soit $n \geq 3$. En utilisant 2, obtenir un encadrement de S_n.

(c) Soit $a, b \geq 1$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\, dt = \frac{\ln(a)}{a} - \frac{\ln(b)}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

(d) En déduire que $(S_n)_{n\geq 3}$ est majorée puis qu'elle converge vers un réel L.

(e) Montrer que L vérifie :
$$\frac{1}{3}+\frac{\ln(3)}{3}\leq L\leq \frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 10 :

(Intégrales de Wallis) Soit $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)\,dt$.

(Q 1) Calculer I_0 et I_1.

(Q 2) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et est strictement positive.

(Q 3) Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer I_n-I_{n+2} puis en déduire que $(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$.

(Q 4) En déduire que la suite de terme général : $v_n=(n+1)I_nI_{n+1}$ est constante égale à $\frac{\pi}{2}$.

(Q 5) En utilisant les variations de la suite (I_n), montrer que pour tout entier n :
$$\frac{n+1}{n+2}\leq\frac{I_{n+1}}{I_n}\leq 1$$

(Q 6) En déduire que $I_n\sim I_{n+1}$.

(Q 7) Montrer alors que $I_n\sim\sqrt{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

Exercice 11 : Calculer les limites des suites de terme général :

(Q 1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}$.

(Q 2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

(Q 3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}$

(Q 4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}$. Le dernier terme de la somme est d'indice $2n$.

Exercice 12 : [corrigé]

(Q 1) Calculer $\int_0^1\ln(1+x)\,dx$.

(Q 2) Calculer alors la limite de la suite de terme général : $v_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 13 : [corrigé] En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t\mapsto\ln(1+t)$ à l'ordre 2 et 3, en $x_0=0$ montrer que
$$\forall x\geq 0; x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

Exercice 14 : [corrigé]

(Q 1) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t\mapsto\ln(1+t)$ en x et $x_0=0$, montrer que : $\forall n\geq 1$
$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+(-1)^n\int_0^x\frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

(Q 2) En déduire que :
$$\ln(2)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}+(-1)^n\int_0^1\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n\frac{dt}{1+t}.$$

(Q 3) On pose, pour tout entier n, : $I_n=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n\frac{dt}{1+t}$. Montrer, à l'aide du changement de variable $u=\dfrac{1-t}{1+t}$ que :
$$I_n=\int_0^1\frac{u^n}{1+u}\,du.$$

(Q 4) En déduire, à l'aide d'encadrements, que $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$. Retrouver alors la limite de la suite de terme général $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}\right)_{n\geq 1}$.

Exercice 15 : On considère la fonction F définie par : $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$.

(Q 1) Déterminer le domaine de définition D de F et montrer que F est de classe C^1 sur D.

(Q 2) Calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F.

(Q 3) Montrer que F est impaire et pour tout $x>0$, $0\leq F(x)\leq\dfrac{1}{2x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$.

Exercice 16 : [corrigé] On considère la fonction F définie par : $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln^2(t)}$.

(Q 1) Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $I=]1;\ +\infty[$.

(Q 2) Calculer $F'(x)$ et en déduire les variations de F.

(Q 3) À l'aide d'encadrements, montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$.

(Q 4) Montrer que : $\forall t\geq 1, 0\leq\ln(t)\leq t-1$. En déduire $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)$.

Problème. [corrigé]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.
   (a) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis montrer que pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq v_n$.
   (b) Déterminer deux réels a et b pour lesquels : $\forall x \in \mathbb{R} - \{0;\ 1\}$, $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$ puis donner une expression simple de v_n.
   (c) Montrer que (u_n) converge vers un réel que l'on notera ℓ et que l'on ne cherchera pas à expliciter.
2. On pose pour tout réel t, $h(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et on note φ la fonction définie sur $[0;\ \pi]$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{h(t)}{2\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in]0;\ \pi] \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

   (a) Montrer que φ est continue sur $[0;\ \pi]$.
   (b) En calculant la limite d'un taux d'accroissement, montrer que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.
   (c) Justifier que φ est de classe C^1 sur $]0;\ \pi[$ et calculer $\varphi'(t)$ pour $t \in]0;\ \pi]$.
   (d) Prouver que φ' est continue en 0.
   (e) En déduire que φ est de classe C^1 sur $[0;\ \pi]$.
3. (a) Montrer, à l'aide d'intégrations par parties, que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi} h(t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}.$$

   (b) Soit $t \in]0;\ \pi]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} e^{int/2}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2},$$

   On rappelle : $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.
   (c) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt$ et démontrer, en vous aidant des questions précédentes, que :

$$\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} h(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

4. (a) Montrer que :

$$\int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt = \frac{-1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{\pi} \varphi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt.$$

   (b) On note $M = \max\limits_{t\in[0;\pi]} |\varphi'(t)|$. Justifier l'existence de M et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\int_0^{\pi} \varphi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt\right| \leq M\pi.$$

   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt = 0$ puis que la suite (u_n) converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Indications

Correction de l'exercice 3 :

(Q 1) $\int_0^1 t^k\,dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$.

(Q 2) On reconnait la formule du binôme de Newton : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k = (1+t)^n$.

(Q 3)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 t^k\,dt = \int_0^1\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k\,dt$$

par linéarité de l'intégrale. Puis,

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k\,dt = \int_0^1 (1+t)^n\,dt = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \boxed{\frac{2^{n+1}-1}{n+1}}$.

Correction de l'exercice 4 :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f^2(x)\,dx \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(t)-f(t)\,dt$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\times(f(t)-1)\,dt$$

Or la fonction $f\times(f-1)$ est négative puisque f est à valeurs dans $[0;1]$. De plus, elle est continue. Par propriété de l'intégrale, on en déduit que $f\times(f-1)$ est nulle. Ainsi, $f([0;1])\subset\{0;1\}$. Cependant, par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que $f([0;1])$ est un intervalle. Les seuls intervalles contenus dans $\{0;1\}$ sont $\{0\}$ ou $\{1\}$. Donc $f([0;1])=\{0\}$ ou $f([0;1])=\{1\}$. Or la fonction f n'est pas la fonction nulle. Par conséquent, $f([0;1])=\{1\}$, autrement dit $\forall x\in[0;1], f(x)=1$.

Correction de l'exercice 5 :

Par le théorème d'intégration par parties, pour $n\geq 1$,

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = \left[f(t)\times\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\times\frac{-\cos(nt)}{n}\,dt$$
$$= \frac{f(a)\cos(na)-f(b)\cos(nb)}{n} + \int_a^b f'(t)\times\frac{\cos(nt)}{n}\,dt$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\frac{f(a)\cos(na)-f(b)\cos(nb)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\times(|f(a)|+|f(b)|)$$

Par le théorème de l'encadrement, la suite de terme général $\frac{f(a)\cos(na)-f(b)\cos(nb)}{n}$ converge vers 0.

Par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b f'(t)\times\frac{\cos(nt)}{n}\,dt\right| \leq \int_a^b |f'(t)|\times\left|\frac{\cos(nt)}{n}\right|dt$$

Enfin, la fonction f' est continue puisque f est de classe C^1. Donc par le théorème de Weierstrass, elle est bornée et atteint ses bornes. On note M un majorant. Finalement,

$$\forall t\in[a;b], |f'(t)|\times\left|\frac{\cos(nt)}{n}\right| \leq \frac{M}{n}$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\left|\int_a^b f'(t)\times\frac{\cos(nt)}{n}\,dt\right| \leq \int_a^b \frac{M}{n}\,dt \leq \frac{M(b-a)}{n}$$

Par le théorème de l'encadrement, la suite de terme général $\int_a^b f'(t)\times\frac{\cos(nt)}{n}\,dt$ converge vers 0.
Finalement, par le théorème de l'encadrement, on a montré que la suite de terme général $\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt$ converge vers 0.

Correction de l'exercice 6 :

(Q 1) L'idée est d'encadrer l'intégrale par deux suites convergentes vers 0. Gardons donc la partie x^n :

$$\forall x\in[0;1],\quad 0\leq\frac{x^n}{1+x}\leq x^n$$

Par croissance de l'intégrale,

$$0\leq I_n\leq\int_0^1 x^n\,dx \Leftrightarrow 0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$$

Par le théorème de convergence par encadrement, on en déduit que la suite de terme général I_n converge vers 0.

(Q 2) Par linéarité de l'intégrale,

$$I_k+I_{k-1} = \int_0^1\frac{t^k+t^{k-1}}{1+t}\,dt = \int_0^1\frac{t^{k-1}(1+t)}{1+t}\,dt$$
$$= \int_0^1 t^{k-1}\,dt = \boxed{\frac{1}{k}}.$$

(Q 3) On remarque que $\frac{1}{k}=I_k+I_{k-1}$. Ainsi,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}[I_{k-1}+I_k]\right)$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_{k-1}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k\right).$$

par linéarité de la somme. On reconnait un beau télescopage :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_{k-1}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}I_k\right)$$
$$= (-1)^0I_0-(-1)^nI_n = I_0-(-1)^nI_n.$$

Or (I_n) converge vers 0, donc $((-1)^nI_n)$ aussi. De plus, $I_0=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=[\ln(1+x)]_0^1=\ln(2)$. Finalement, la suite de terme général $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$

converge vers $\ln(2)$. L'année prochaine, on écrira

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \ln(2).$$

Correction de l'exercice 7 :

On a $\forall x \in [0;\pi], 0 \leq \frac{\sin(x)}{x+n} \leq \frac{1}{n}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leq u_n \leq \pi/n$. Par le théorème de l'encadrement, la suite (u_n) converge donc vers 0. Pour trouver un équivalent, tentons par exemple une intégration par parties.

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{-\cos(x)}{x+n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{(x+n)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{\pi+n} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{(x+n)^2}\,dx \\ &= \frac{\pi+2n}{n(\pi+n)} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{(x+n)^2}\,dx. \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{\pi+2n}{n(\pi+n)} \sim \frac{2n}{n^2} \sim \frac{2}{n}$.

Étudions si $\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{(x+n)^2}\,dx = o(1/n)$. Pour cela, par l'inégalité triangulaire puis la croissance de l'intégrale, on a :

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{(x+n)^2}\,dx\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{n^2}\,dt \leq \pi/n^2.$$

Ainsi, $\int_0^{\pi} \frac{\cos(x)}{(x+n)^2}\,dx = o(1/n)$ et finalement,

$$u_n = \frac{2}{n} + o(1/n) \Rightarrow \boxed{u_n \sim \frac{2}{n}}$$

Correction de l'exercice 8 :

(Q 1) On a $\forall t \in [0;1], 0 \leq t^n e^{-t} \leq t^n$. Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Par le théorème de l'encadrement, on en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(Q 2) $I_0 = \int_0^1 e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^1 = \boxed{1 - 1/e}$.

(Q 3) Par intégration par parties,

$$I_{n+1} = [t^{n+1}(-e^{-t})]_0^1 + (n+1)\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$$

Donc :

$$\boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n}$$

(Q 4) On pose $W_n = \frac{I_n}{n!}$ pour tout entier n.

(a)

$$\begin{aligned} W_k - W_{k-1} &= \frac{I_k}{(k)!} - \frac{I_{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{-\frac{1}{e} + kI_{k-1}}{k!} - \frac{I_{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \frac{-1}{e \times k!}. \end{aligned}$$

(b) Sommons :

$$\sum_{k=1}^{n} W_k - W_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{e \times k!}$$

On reconnait une somme télescopique.

$$W_n - W_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{e \times k!}$$

Or $W_0 = I_0 = 1 - 1/e$. Ainsi,

$$W_n = 1 - 1/e + \sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{e \times k!} = \boxed{1 - (1/e) \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}$$

(c) La suite (I_n) converge vers 0, donc la suite (W_n) aussi. Ainsi,

$$1 - (1/e) \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e \times 1 = e.$$

Correction de l'exercice 9 :

(Q 1) La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions dérivables. On a

$$\begin{aligned} \forall x > 0, \quad f'(x) &= \frac{x^2 \times \frac{1}{x} - \ln(x) \times 2x}{x^4} \\ &= \frac{x[1 - 2\ln(x)]}{x^4} \\ &= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} \end{aligned}$$

D'où les variations de f :

x	0		$e^{1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1/2e$	$\searrow$	0

(Q 2) Pour $k \geq 3$, d'après la question précédente, la fonction f est décroissante sur $[k; k+1]$ et $[k-1; k]$. Ainsi, l'aire sous la courbe entre $k-1$ et k est supérieure à l'aire du rectangle de formé par les points $(k-1, 0), (k, 0), (k, f(k))$. Ce rectangle est par ailleurs d'aire égale à $f(k)$. Donc, $\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \geq f(k)$. De même, l'aire sous la courbe entre k et $k+1$ est inférieure à l'aire du rectangle de formé par les points $(k, 0), (k+1, 0), (k, f(k))$. Ce rectangle est par ailleurs d'aire égale à $f(k)$. Ainsi, $\int_{k}^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$. Finalement, on a montré que $\forall k \geq 3$:

$$\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$$

(Q 3) (a) $S_{n+1} - S_n = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \geq 0$. Par conséquent, la suite est croissante.

(b) On somme pour k allant de 3 à n :

$$\sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \int_3^{n+1} f(t)\,dt \leq S_n \leq \int_2^{n} f(t)\,dt$$

(c) On effectue une intégration par parties. On pose :

$$u'(x) = \frac{1}{x^2}; u(x) = -1/x$$

et

$$v(x) = \ln(x); v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Ces deux fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[a;b]$. Ainsi,

$$\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \left[\frac{-\ln(x)}{x}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1}{x}\times\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{\ln(a)}{a} - \frac{\ln(b)}{b} + \left[\frac{-1}{x}\right]_a^b$$

$$\boxed{= \frac{\ln(a)}{a} - \frac{\ln(b)}{b} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

(d) Finalement, $S_n \leq \int_2^n f(t)\,dt$ et $\int_2^n f(t)\,dt = -\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}$. La suite (S_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}$. Par le théorème des suites monotones, elle converge vers un réel $L \leq \frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}$.

(e) On utilise l'encadrement vérifié par S_n.

$$\int_3^{n+1} f(t)\,dt \leq S_n \leq \int_3^n f(t)\,dt$$

De plus, $\int_3^{n+1} f(t)\,dt = \frac{\ln(3)}{3} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} \to \frac{\ln(3)}{3}+\frac{1}{3}$ par croissances comparées. Et $\int_2^n f(t)\,dt \to \frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}$. Par passage à la limite dans les inégalités précédentes, on en déduit que

$$\boxed{\frac{1}{3}+\frac{\ln(3)}{3} \leq L \leq \frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}}$$

Correction de l'exercice 12 :

(Q 1) Une intégration par parties s'impose dans ce genre de cas.

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \Big[x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$$

$$= \ln(2) - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \ln(2) - \int_0^1 1 - \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= \ln(2) - [1-\ln(2)] = 2\ln(2)-1.$$

(Q 2) On tente de reconnaître une série de Riemann. Pour cela, utilisons la fonction ln qui transforme un produit en une somme. $\ln(v_n) = \frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{k}{n})$. Puisque la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ est continue sur $[a;b]$, on en déduit que $\ln(v_n) \to_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln(2)-1$. Puisque exp est continue, on en déduit que $v_n \to_{n\to+\infty} e^{2\ln(2)-1} = \boxed{4/e}$.

Correction de l'exercice 13 :

Soit $x \geq 0$. On pose $f : t \mapsto \ln(1+t)$. Cette fonction est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$. Dérivons la !

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}; f''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}; f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}; f^{(4)}(t) = \frac{-6}{(1+t)^4}$$

Appliquons donc la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f^{(3)}(t)\,dt.$$

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\frac{2}{(1+t)^3}\,dt.$$

On remarque que la fonction qui est intégrée est positive sur $[0;x]$. Donc par positivité de l'intégrale, on en déduit que son intégrale l'est aussi. Ainsi, $\boxed{\forall x \geq 0; \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}}$. On fait de même pour l'autre inégalité.

Correction de l'exercice 14 :

(Q 1) La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$. On a :

$$f'(t) = \frac{1}{1+t}; f''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2};$$

$$f'''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}; f^{(4)}(t) = \frac{-6}{(1+t)^4}$$

Par une rapide récurrence, on a donc $\forall n \geq 1; f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+t)^n}$. Par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)(x)}}{k!}(x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+0)^k \times (k!)} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

(Q 2) Finalement en $x=1$, on obtient :

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \int_0^1 (-1)^n \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

Par glissement d'indice,

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \int_0^1 (-1)^n \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

On a donc montré que :

$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n \frac{dt}{1+t}.$$

(Q 3) On pose, pour tout entier n, : $I_n = \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^n \frac{dt}{1+t}$. Montrer, à l'aide du changement de variable $u = \frac{1-t}{1+t}$ que :

$$I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u}\,du.$$

On a :

- $u = \dfrac{1-t}{1+t} = \varphi(t)$, fonction définie sur $[0;1]$
- Cette fonction est de classe C^1.
- Si $t=0$ alors $u=1$ et si $t=1$ alors $u=0$.
- $u = \dfrac{1-t}{1+t} \Leftrightarrow (1+t)u = 1-t$ car $t+1 \neq 0 \Leftrightarrow t(u+1) = 1-u \Leftrightarrow t = \frac{1-u}{1+u}$ car $1+u>0$.
- $\frac{dt}{du} = \frac{-2}{(1+u)^2}$

Par le théorème de changement de variables, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^0 u^n \tfrac{-2}{(1+u)^2} \times \tfrac{1}{1+\frac{1-u}{1+u}}\,du \\ &= 2\int_0^1 u^n \tfrac{1}{(1+u)[1+u+1-u]}\,du \\ &= \boxed{\int_0^1 \frac{u^n}{1+u}\,du}. \end{aligned}$$

(Q 4) On a :

$$\forall u \in [0;1], 0 \leq \frac{u^n}{1+u} \leq u^n$$

Par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 u^n\,du \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Par le théorème d'encadrements, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. Ainsi la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\ln(2)$.

Correction de l'exercice 16 :

(Q 1) On sait que $t \mapsto \dfrac{1}{\ln^2(t)}$ est continue sur $]1;\ +\infty[$. Or, si $x>1$, alors $x^2 > x > 1$ et donc : $[x;\ x^2] \subset]1;\ +\infty[$. On en déduit que $t \mapsto \dfrac{1}{\ln^2(t)}$ est continue sur $[x;\ x^2]$, ce qui justifie l'existence de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln^2(t)} = F(x)$ pour tout $x>1$.

Notons G une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln^2(t)}$ sur $]1;\ +\infty[$ (G existe par continuité de $t \mapsto \dfrac{1}{\ln^2(t)}$ sur cet intervalle d'après le théorème fondamental de l'analyse). Alors : $\forall t \in]1;\ +\infty[,\ G'(t) = \dfrac{1}{\ln^2(t)}$. Ainsi, G' est continue sur $]1;\ +\infty[$ et donc G est de classe C^1 sur : $]1;\ +\infty[$. Par ailleurs : $\forall x>1, F(x) = G(x^2) - G(x)$. Par composition de fonctions de classe C^1 puis somme de fonctions de classe C^1, on en déduit que F est de classe C^1 sur $]1;\ +\infty[$.

(Q 2) Les formules de dérivation usuelles nous donnent donc : $F'(x) = 2xG(x^2) - G'(x) = \dfrac{2x}{\ln(x^2)^2} - \dfrac{1}{\ln^2(x)} = \boxed{\dfrac{x-2}{2\ln^2(x)}}$. Ainsi, si $x>2$, $F'(x)>0$ et donc F est strictement croissante, et F est strictement décroissante sinon.

(Q 3) Soit $x>1$. Alors : $\forall t \in [x;\ x^2],\ 0 \leq \ln(x) \leq \ln(t) \leq \underbrace{\ln(x^2)}_{=2x\ln(x)}$. Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ on en déduit : $\forall t \in [x;\ x^2],\ 0 < \ln^2(x) \leq \ln^2(t) \leq 4\ln^2(x)$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit : $\forall t \in [x;\ x^2],\ \dfrac{1}{4\ln^2(x)} \leq \dfrac{1}{\ln^2(t)} \leq \dfrac{1}{\ln^2(x)}$. Par croisance de l'intégrale, on en déduit : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{4\ln^2(x)}\,dt \leq F(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln^2(x)}\,dt$

Or : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{4\ln^2(x)}\,dt = \frac{x^2-x}{4\ln^2(x)}$. De même : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln^2(x)}\,dt = \frac{x^2-x}{\ln^2(x)}$. Ainsi :

$$\forall x>1, \frac{x^2-x}{4\ln^2(x)} \leq F(x).$$

Or, $\dfrac{x^2-x}{4\ln^2(x)} \sim_{+\infty} \dfrac{x^2}{4\ln^2(x)}$ et par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{4\ln^2(x)} = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x}{4\ln^2(x)} = +\infty$. Par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty.}$

(Q 4) L'inégalité : $\forall t \geq 1, 0 \leq \ln(t)$ est évidente et l'autre inégalité esten fait l'inégalité fondamentale du logarithme (cf. cours pour la démonstration par études de fonctions). Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ puis stricte décroissancede la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit de la même façon :

$\forall t>1,\ \dfrac{1}{\ln^2(t)} \geq \dfrac{1}{(t-1)^2}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit : $\forall x>1,\ F(x) \geq \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^2}$.

Une primitive de $\dfrac{1}{(t-1)^2}$ étant $-\dfrac{1}{t-1}$ sur $]1;\ +\infty[$, on en déduit : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{(t-1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x^2-1)} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$. Ainsi, $\forall x>1,\ F(x) \geq \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x}{(x-1)(x+1)} = +\infty$ (par opérations usuelles) d'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to1^+} F(x) = +\infty}$ par encadrement.

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

   $\forall k \in [\![2;\ n]\!],\ k^2 = k\times k \geq k \times (k-1)$ d'où le résultat en sommant cette inégalité.

   (b) En mettant au même dénominateur, nous obtenons $a=-1$ et $b=1$. Par télescopie,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}.$$

(c) On en déduit pour tout $n \geq 2,\ u_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$. Donc, $\forall n \geq 2,\ u_n \leq 2$. De plus, $u_1 = 1 \leq 2$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq 2$. La suite étant croissante et majorée, elle converge.

2. (a) Tout d'abord, φ est continue sur $]0;\ \pi]$ (en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Il reste donc à étudier la continuité en 0. On a :

$$\frac{t^2}{2\pi} - t \sim_0 -t \text{ et } 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 t$$

Par conséquent,

$$\varphi(t) \sim_{0^+} t - \frac{t}{t} \text{ c'est à dire } \varphi(t) \sim_{0^+} -1$$

$$\text{soit encore } \lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = -1 = \varphi(0).$$

Ainsi, φ est continue sur $]0;\ \pi]$ et $\lim_{t \to 0} \varphi(t) = \varphi(0)$: φ est donc également continue en 0. D'où $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0;\ \pi].}$

(b) Calculons le taux d'accroissement de φ en 0 :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{\varphi(t) + 1}{t} = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2t\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Essayons d'obtenir un équivalent de ce quotient pour avoir sa limite. Pour ce faire, à cause du t en plus au dénominateur on va utiliser nos formules à l'ordre 2.

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{12} + o(t^3) = \frac{t}{2} + o_0(t^2)$$

Alors, pour le numérateur :

$$\frac{t^2}{2\pi} - t + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^2}{2\pi} - t + t + o_0(t^2) = \frac{t^2}{2\pi} + o_0(t^2)$$

Et pour le dénominateur :

$$2t\sin\left(\frac{t}{2}\right) = t^2 + o_0(t^2)$$

On traduit cela en équivalents pour passer plus facilement au quotient :

$$\frac{t^2}{2\pi} - t + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 \frac{t^2}{2\pi} \quad \text{et} \quad 2t\sin\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 t^2$$

D'où

$$\frac{\varphi(t)+1}{t} \sim_0 \frac{1}{2\pi} \quad \text{et donc } \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)+1}{t} = \frac{1}{2\pi}.$$

Finalement $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en 0 et } \varphi'(0) = \frac{1}{2\pi}}$

(c) La fonction φ est de classe C^1 sur $]0;\ \pi]$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur cet intervalle et dont le dénominateur ne s'annule pas (sur cet intervalle). De plus,

$$\boxed{\forall t \in]0;\ \pi],\ \varphi'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}}.$$

(d) On détermine la limite de φ' lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. En utilisant les développements limités des fonctions usuelles, on a :

$$4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 t^2$$

On va donc déterminer le développement limité à l'ordre 2 du numérateur de φ' :

$$\begin{aligned}
& \left(\tfrac{t}{\pi} - 1\right) 2\sin\left(\tfrac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) \\
= \quad & \left(\tfrac{t}{\pi} - 1\right)\left(t + o_0(t^2)\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(1 + o_0(t)\right) \\
= \quad & -t + \frac{t^2}{\pi} + o_0(t^2) + t - \frac{t^2}{2\pi} + o_0(t^2) \\
= \quad & \frac{1}{2\pi}t^2 + o_0(t^2)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 \frac{1}{2\pi}t^2$ et $4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sim_0 t^2$.

Par conséquent, $\varphi'(t) \sim_0 \frac{1}{2\pi}$, donc : $\lim_{t \to 0} \varphi'(t) = \frac{1}{2\pi} = \varphi'(0)$. $\boxed{\varphi' \text{ est donc bien continue en 0.}}$

(e) On vient de prouver que φ est de classe C^1 sur $]0; \pi]$ et que φ' est continue en 0. Il s'ensuit que φ' est continue sur $[0;\ \pi]$, ou encore :

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0;\ \pi].}$$

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour calculer l'intégrale proposée, on procède à deux intégrations par parties successives (licite puisque toutes les fonctions considérées sont de classe C^∞ sur $[0;\ \pi]$).

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,dt \\
= \quad & \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \times \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \times \frac{\sin(kt)}{k}\,dt \\
= \quad & \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) \times \frac{\sin(k\pi)}{k}}_{0} - 0 - \frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(kt)\,dt \\
= \quad & -\frac{1}{k}\left(\left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \times \frac{-\cos(kt)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \times \frac{-\cos(kt)}{k}\,dt\right) \\
= \quad & -\frac{1}{k}\left((1-1) \times \frac{-\cos(k\pi)}{k} - (0-1) \times \frac{-\cos(0)}{k} + \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kt)\,dt\right) \\
= \quad & \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi k^2}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi \\
= \quad & \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, ,

$$\boxed{\int_0^\pi h(t)\cos(kt),t = \frac{1}{k^2}.}$$

(b) En utilisant les sommes de termes d'une suite géométrique, nous obtenons $e^{it} \neq 1$ car $t \neq 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{it}-1}$.

Or, par factorisations par l'angle moitié : $e^{i(n+1)t} - 1 = 2i\sin((n+1)t/2)e^{i(n+1)t/2}$ et $e^{it}-1 = 2i\sin(t/2)e^{it/2}$. En passant à la partie réelle, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

En utilisant la formule de trigonométrie proposée dans l'indication, nous obtenons :

$\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\cos\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin((n+1/2)t) + \sin(t/2))$, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2}.$$

En remarquant que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kt) - 1$, nous obtenons finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.}$$

(c) $t \mapsto \varphi(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})\right)$ est continue sur $[0;\ \pi]$, donc l'intégrale existe bien. Par ailleurs, d'après précédemment :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi h(t)\cos(kt)\,dt\\ &= \textstyle\int_0^\pi h(t)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)\,dt\\ &= \textstyle\int_0^\pi\left(\frac{h(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right) - \frac{h(t}{2}\right.\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \varphi(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\pi h(t)\,dt$. ou encore :

$$\boxed{\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi h(t)\,dt. + \sum_{k=1}^{n}}$$

4. (a) L'application φ est une fonction de classe C^1 sur $[0;\ \pi]$. On a alors en intégrant par parties (licite puisque $t \mapsto -\frac{\cos\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{n+1/2}$ et $t \mapsto \varphi(t)$ sont de classe C^1 sur $[0;\ \pi]$) :

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt &= \left[-\frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{n+1/2}\varphi(t)\right]_0^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\textstyle\int_0^\pi \varphi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt\\ &= \frac{\varphi(0)-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\varphi(\pi)}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\textstyle\int_0^\pi \varphi'(t)\cos(xt)\,dt.\end{aligned}$$

Puisque $\varphi(0) = -1$ et $\varphi(\pi) = -\frac{\pi}{2}$, nous en déduisons :

$$\boxed{\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt = \frac{-1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \varphi'(t)}$$

(b) Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée est atteint ses bornes. Puisque $t \mapsto \varphi(t)$ est de classe C^1 sur $[0;\ \pi]$, on en déduit que $t \mapsto |\varphi'(t)|$ est continue sur $[0;\ \pi]$, ce qui justifie l'existence de son élément maximal M.

En appliquant l'inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\left|\int_0^\pi \varphi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)\,dt\right| \leq \int_0^\pi \left|\varphi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right.\right.$$

(c) Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi \varphi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt\right| \leq \frac{M\pi}{n+\frac{1}{2}}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{M\pi}{n+\frac{1}{2}} = 0$, donc par théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1/2}\int_0^\pi \varphi'(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,d,t = 0.$$

Par somme, nous obtenons : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right.\right.}$

(d) Soit $n \geq 2$ un entier. D'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \varphi(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt = 0.$$

D'autre part :

$$\int_0^\pi h(t),t = \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n - \frac{\pi^2}{6} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}u_n = \frac{\pi^2}{6}.}$$

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆