TD 17

Comparaisons des suites et fonctions

Les suites

Exercice 1 : [corrigé] Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux ci-dessous puis leur limite.

(a) $u_n = n^3 \ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$; (b) $u_n = n(\ln(n+1)-\ln(n))$; (c) $u_n = \dfrac{n\ln\left(1+\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$;

(d) $u_n = n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$; (e) $u_n = \dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{1/n^2}-1}$; (f) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\arctan(n^2)$;

(g) $u_n = n^2\arctan\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$; (h) $u_n = \sqrt{n^3+2n^2+1}$; (i) $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

(j) $u_n = \sqrt[3]{n^3+1}-n$; (k) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; (l) $u_n = e^{-n^2+\frac{1}{n}}-e^{-n^2}$;

(m) $u_n = \sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$; (n)$u_n = \ln\left(\ln\left(e+\dfrac{1}{n}\right)\right)$; (o) $u_n = \tan\left(\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right)\right)$;

(p) $u_n = \sqrt{n^2+n+1}-n$; (q) $u_n = \dfrac{n^5+2n^3+2}{n^6+2n+1}$; (r) $u_n = \dfrac{(1-e^{\frac{1}{n}})\sin\frac{1}{n}}{n^2+n^3}$;

(s) $u_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}\right)$; (t) $u_n = \tan\left(\text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$; (u) $u_n = \tan\left(\text{Arcsin}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right)$.

Exercice 2 : [corrigé] Déterminer un équivalent simple des suites de termes généraux ci-dessous puis leur limite.

(Q 1) $u_n = \sqrt{\text{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)-1}$; (Q 2) $u_n = \sqrt{\cos\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)-1}$.

Exercice 3 : Donner des équivalents simples et les limites éventuelles des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes. On pourra utiliser l'équivalence suivante : $v_n \sim u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + o(u_n)$.

(a) $u_n = n^2\Big(\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)+e^{\tan\left(\frac{\pi}{n^2}\right)}-1\Big)$; (b) $u_n = \ln\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)+\dfrac{\tan\left(\text{sh}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n}$.

Exercice 4 : [corrigé] Soit la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1; S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

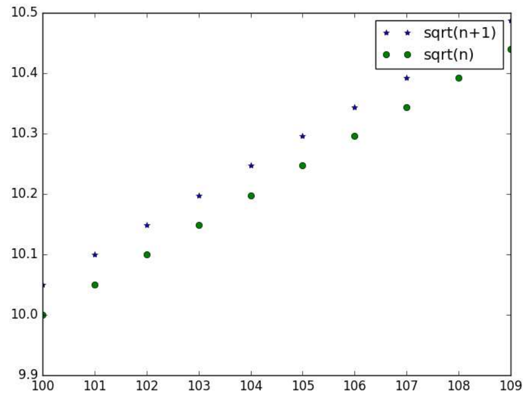
(Q 1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*; \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1}-\sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

(Q 2) En déduire que (S_n) vérifie cet encadrement :

$$2\big(\sqrt{n+1}-1\big) \leq S_n \leq 2\big(\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}\big)$$

(Q 3) En déduire un équivalent de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 5 : [corrigé] **S'engager dans une recherche.**



Nous savons que $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$ (pourquoi ?). Allons plus loin et étudions l'écart entre ces deux termes. C'est à dire trouver $a, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sqrt{n+1} = \sqrt{n} + \frac{a}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Exercice 6 : [corrigé] On considère la fonction définie sur $[0;\ 1[$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{\pi} \tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation : $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante puis qu'elle converge vers un réel que l'on déterminera.
3. Déterminer un équivalent simple de (x_n).

Exercice 7 : [corrigé]

(Q 1) Montrer que l'équation : $x^3 - 3x + 2 = \frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n sur $]0;\ 1[$.

(Q 2) Montrer que la suite (x_n) est croissante puis qu'elle converge vers un réel que l'on précisera.

(Q 3) On pose : $v_n = x_n - 1$. Montrer que $v_n^2 \sim \frac{1}{3n}$ puis en déduire un équivalent de (v_n).

(Q 4) En déduire que : $x_n = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ avec a et b que l'on précisera.

Exercice 8 : [corrigé] Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

1. Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.
2. Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $e^{u_n} \sim e^{v_n}$?

Les fonctions

Exercice 9 : Donner un équivalent simple en 0 des fonctions ci-dessous et la limite éventuelle en 0.

(a) $\ln(1+\sin(x))$; (b) $\dfrac{\ln(1+2x)}{\cos(3x)-1}$; (c) $\dfrac{(1-\cos(x))\ln(1+x^3)}{x^3\tan^2(3x)}$; (d) $\ln(\cos(x))$.

Exercice 10 : Déterminer, si elle existe, la limite des fonctions suivantes au point a précisé.

(a) $f(x)=\frac{\ln x}{(x+1)^3}$ en $a=0$ puis en $a=+\infty$; (b) $f(x)=\frac{e^{\sin x}-1}{\cos x-1}$ en $a=0$.

Exercice 11 : [corrigé] Déterminer un équivalent des fonctions f suivantes en a, puis calculer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

(a) $f(x)=x\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$, $a=+\infty$; (b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)}$, $a=+\infty$; (c) $f(x)=x^3\arctan(e^{-x})$, $a=+\infty$;

(d) $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{\tan(x)}$, $a=0$; (e) $f(x)=\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$, $a=1$; (f) $f(x)=\dfrac{x^x-1}{x-1}$, $a=1$;

(g) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$, $a=4$; (h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$, $a=2$; (i) $f(x)=\dfrac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$, $a=\pi/4$;

(j) $f(x)=\dfrac{\sin(x)-\sin(e)}{\ln(x)-1}$, $a=e$; (k) $f(x)=\dfrac{1-2\cos(x)}{\pi-3x}$, $a=\pi/3$; (l) $f(x)=\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{1-\sqrt{2}\sin(x)}$, $a=\pi/4$.

Exercice 12 :

1. Démontrer que $\ln(x+1)\sim_{x\to+\infty}\ln(x)$. A-t-on $e^{x+1}\sim_{x\to+\infty}e^x$?
2. Démontrer que $\ln(2x)\sim_{x\to+\infty}\ln(x)$. A-t-on $e^{2x}\sim_{x\to+\infty}e^x$?

Exercice 13 : Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sqrt{x})^{1/x}$; (b) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\ln(x)}$; (c) $\lim\limits_{x\to0}(\cos(x))^{1/x^3}$;

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$; (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}\right)^x$; (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 14 : Soit f une fonction dérivable en a tel que $f'(a)\neq0$. Montrer que

$$f(x)-f(a)\sim_a(x-a)f'(a)$$

Exercice 15 : [indications] Soit a un réel quelconque. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose de plus que $f\sim_a g$ et que f est strictement positive au voisinage de a.

(Q 1) Démontrer que si f admet une limite différente de 1 en a, alors $\ln f$ et $\ln g$ sont équivalentes en a.

(Q 2) Démontrer que si f admet une limite finie en a alors e^f et e^g sont équivalentes en a.

Indications

Exercice 15 :

1. $\dfrac{\ln(f)}{\ln(g)} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{f}{g}\times g\right)}{\ln(g)} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{f}{g}\right)}{\ln(g)} + 1.$
2. $\dfrac{e^f}{e^g} = e^{f-g} = e^{f\left(\frac{f}{g}-1\right)}.$

Correction de l'exercice 1 :

(a) Par équivalents usuels, $\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$. De même, $\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right) \sim \dfrac{1}{3n}$. Par produit : $\boxed{u_n \sim \dfrac{6}{n}.}$ Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{n} = 0$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(b) $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Or $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par produit, $\boxed{u_n \sim 1.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

(c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ par composition des limites, nous avons par équivalent usuel : $\ln\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ $\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Par produit : $u_n \sim n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Par équivalent usuel : $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par transitivité, $\boxed{u_n \sim 1.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

(d) Par équivalent usuel, $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n^2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Par produit : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2}.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}.}$

(e) Par équivalents usuels, $1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n^2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et de même $e^{1/n^2} - 1 \sim \dfrac{1}{n^2}$. Par quotient : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2}.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}.}$

(f) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(n^2) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} \neq 0$, nous avons $\operatorname{Arctan}(n^2) \sim \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\boxed{u_n \sim \dfrac{\pi}{2n^2}}$ par produit. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2n^2} = 0$, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(g) Par équivalent usuel, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ par équivalent usuel et car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. Par produit : $\boxed{u_n \sim 1.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.}$

(h) Puisque n^3+2n^2+1 est polynômiale, $n^3+2n^2+1 \sim n^3$. Par passage à la racine, $\boxed{\sqrt{n^3+2n^2+1} \sim n^{3/2}.}$ Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{3/2} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

(i) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1\right)$. Or, par équivalent usuel, $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{2n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$. Par quotient, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2n^{3/2}}.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n^{3/2}} = 0$, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(j) $\sqrt[3]{n^3+1} - n = n\left(\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{1/3} - 1\right)$. Or, par équivalent usuel, $\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{1/3} - 1 \sim \dfrac{1}{3n^3}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$. Ainsi, par produit, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{3n^2}.}$ Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3n^2} = 0$ donc $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{3n^2}.}$

(k) $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$. D'après (i), $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. D'autre part $n+1$ est polynômiale donc $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$. Par produit et quotient, nous en déduisons : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2n^{3/2}}.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n^{3/2}} = 0$, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(l) $u_n = e^{-n^2}\left(e^{1/n} - 1\right)$. Par équivalent usuel, $e^{1/n} - 1 \sim \dfrac{1}{n}$ donc $\boxed{u_n \sim \dfrac{e^{-n^2}}{n}.}$ Par opérations usuelles, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-n^2}}{n} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(m) Par opérations usuelles, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$ donc par équivalent usuel $\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) \sim \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Toujours par équivalent usuel, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ donc par transitivité, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

(n) On constate que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(e+\dfrac{1}{n}\right) = 1$. On fait donc apparaître l'équivalent usuel : $u_n = \ln(1+v_n)$ avec $v_n = \ln\left(e+\dfrac{1}{n}\right) - 1$ qui tend nécessairement vers 0. Ainsi, $u_n \sim v_n$. D'autre part : $v_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{en}\right)$ donc

$v_n \sim \dfrac{1}{en}$ par équivalent usuel. Il s'ensuit $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{en}}$ par transitivité. Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{en} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} {}_n = 0.}$

(o) Par opérations usuelles, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right) = 0$ donc par équivalent usuel $\tan\left(\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right)\right) \sim \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right)$. Toujours par équivalent usuel, $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}$. D'autre part : n^2+3 est polynômiale donc $n^2+3 \sim n^2$ ce qui donne par passage à la racine $\sqrt{n^2+3} \sim n$. Par quotient ainsi que par transitivité, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}.}$ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

(p) $u_n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} - 1\right)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 0$, par équivalent usuel : $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} - 1 \sim \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n^2}$. De plus, $\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{n+1}{2n^2}$. Or $n+1$ est polynômiale donc $n+1 \sim n$. Par quotient, $\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n^2} \sim \dfrac{1}{2n}$. Par transitivité, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{2n}.}$ Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(q) Le numérateur étant polynômiaux, nous avons : $n^5 + 2n^3 + 2 \sim n^5$ et $n^6 + 2n + 1 \sim n^6$. Par quotient, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}.}$ Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(r) Par équivalents usuels, $e^{1/n} - 1 \sim \dfrac{1}{n}$, $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$. D'autre part, le dénominateur est polynômial donc $n^2 + n^3 \sim n^3$. Par produits et quotients, $\boxed{u_n \sim \dfrac{-1}{n^5}.}$ Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n^5} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(s) Par propriété algébrique, $u_n = \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)}$. Or, par équivalents usuels, $\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ donc par opérations usuelles, $\boxed{u_n \sim n.}$ Nous avons $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

(t) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$, par équivalents usuels, $u_n \sim \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. De plus, toujours par équivalents usuels, $\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ donc par transitivité $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n}.}$ Enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

Correction de l'exercice 2 :

(Q 1) $u_n = \sqrt{\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1} = \sqrt{1 + (\operatorname{ch}(1/n) - 1)} - 1$. Or $\operatorname{ch}(1/n) - 1 \to 0$. Par équivalent usuel :

$$u_n \sim \frac{1}{2}\Big(\operatorname{ch}(1/n) - 1\Big) \sim \frac{1}{4n^2}$$

en utilisant un équivalent usuel, ainsi que la transitivité de la relation $\sim$.

(Q 2) $u_n = \sqrt{\cos\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)} - 1$. Même technique. On sait que $\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 1$ donc $\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 \to 0$. Par équivalent usuel :

$$u_n =\sim \frac{1}{2}\Big(\cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\Big) \sim \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2$$

car $\sin(1/n) \to 0$ et $\cos(u_n) - 1 \sim \frac{-u_n^2}{2}$ si $u_n \to 0$. Enfin, $\sin(1/n) \sim 1/n$. Par transitivité et passage à la puissance, on obtient :

$$u_n \sim \frac{-1}{4n^2}$$

Correction de l'exercice 4 :

(Q 1) D'après l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $I = [k;\ k+1]$ appliqué à la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, nous avons : $m(k+1-k) \leq |f(k+1) - f(k) \leq M(k+1-k)$, où m est n'importe quel minorant f' et M n'importe quel majorant de $|f'|$ sur I. Or $\forall x \in I, f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = |f'(x)|$, et $\forall x \in I \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Au final :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*;\ \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}.}$$

(Q 2) Puisque $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$, alors : $\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$. Or par télescopage $\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1$. Par conséquent : $S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

En procédant de la même façon avec la deuxième inégalité, nous obtenons : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{n+1} - 1$. Or par glissement d'indice, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} = \sum\limits_{k=2}^{n+1} \dfrac{1}{2\sqrt{k}} = \dfrac{1}{2}(S_n + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 1)$.

On en déduit :

$S_n \leq 2(\sqrt{n+1} - 1) + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \frac{1}{2}\right)$.

Au final, nous obtenons bien l'encadrement :

$$\boxed{2(\sqrt{n+1}-1) \leq S_n \leq 2(\sqrt{n+1}-\frac{1}{2}).}$$

(Q 3) Les deux encadrements sont des expressions équivalentes à $2\sqrt{n}$. Intuitivement, S_n devrait épouser le même comportement. Justifions alors ce point rigoureusement : En divisant l'encadrement précédent par $2\sqrt{n}$, nous obtenons l'encadrement :

$\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} = 1$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} = 1$, donc par encadrement,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1 \Leftrightarrow \boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}.}$

Correction de l'exercice 5 :

On doit donc chercher un équivalent de $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\geq 0}$.

On remarque que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n} \times \left(\sqrt{1+/n}-1\right)$.

Par propriété,

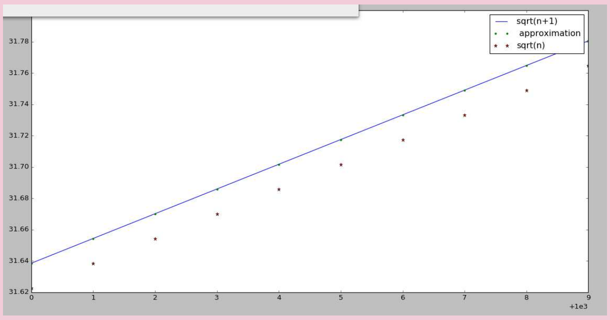
$$\sqrt{1+1/n}-1 \sim \frac{1}{2n}$$

Par produit,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} + o(1/\sqrt{n})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1} = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o(1/\sqrt{n})$$

On obtient ainsi $\alpha = 1/2$ et $a = 1/2$. On observe ce résultat :



Correction de l'exercice 6 :

1. Par opérations usuelles, f est dérivable sur $[0;\ 1[$ et $\forall x \in [0;\ 1[$, $f'(x) = \frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{2x}{\pi}\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\cos^2\left(\frac{2x}{\pi}\right)} = \frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{x}{\cos^2\left(\frac{2x}{\pi}\right)}$.

   Puisque $x \in [0;\ 1[$, nous avons : $\frac{x}{\cos^2\left(\frac{2x}{\pi}\right)} > 0$.

   Nous avons également : $\frac{\pi x}{2} \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) > 0$. Par somme d'expressions positives, nous en déduisons : $\forall x \in [0;\ 1[$, $f'(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante et continue donc induit une bijection de $[0;\ 1[$ vers $f([0;\ 1[) = [f(0);\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)[= [0;\ +\infty[$. Or $\frac{1}{n} \in [0;\ +\infty[$ donc l'équation : $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution $x \in [0;\ 1[$ que l'on note x_n.

2. Nous avons : $f(x_n) = \frac{1}{n}$ et $f(x_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ donc : $f(x_{n+1}) < f(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n$ car f est strictement croissante. On en déduit que (x_n) est strictement décroissante.

   (x_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge vers un réel ℓ. En passant l'égalité $f(x_n) = \frac{1}{n}$ à la limite et par continuité de f en $\ell \in [0;\ 1[$, on en déduit : $f(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$.

3. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, nous avons : $\frac{2x_n}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) \sim \frac{2x_n}{\pi} \times \frac{\pi x_n}{2} \sim x_n^2$ (par produit d'équivalents). Or : $\frac{2x_n}{\pi}\tan\left(\frac{\pi x_n}{2}\right) = \frac{1}{n}$, donc : $x_n^2 \sim \frac{1}{n}$. Par passage à la puissance, $x_n = \sqrt{x_n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 7 :

(Q 1) La fonction d'expression $f(x) = x^3 - 3x + 2$ a pour dérivée : $f'(x) = 3(x^2-1)$, ce qui prouve que f est strictement décroissante sur $]0;\ 1[$. Étant par ailleurs continue (car dérivable par exemple) sur cet intervalle, elle induit une bijection de $]0;\ 1[$ vers $]f(1);\ f(0)[=]0;\ 2[$. Il ne nous reste plus qu'à constater que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \in]0;\ 2[$ pour assurer l'existence et l'unicité de l'antécédent x_n sur $]0;\ 1[$ associé à f. D'où :

$$\boxed{x^3 - 3x + 2 = \frac{1}{n} \text{ admet un unique antécédent } x_n \in]0;\ 1[.}$$

(Q 2) L'idée est de comparer les images de x_n et x_{n+1} par f. En effet : $f(x_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ et $f(x_n) = \frac{1}{n}$ par définition. Or $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$. Par conséquent : $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} \geq x_n$, la fonction f étant strictement décroissante sur $]0;\ 1[$. Cela prouve donc que $\underline{(x_n) \text{ est croissante.}}$ Étant de plus majorée par 1, on en déduit qu'elle converge vers un réel ℓ. Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x_n < 1$, donc par passage à la limite, $\underline{0 \leq \ell \leq 1}$. Un passage à la limite de la relation : $x_n^3 - 3x_n + 2 = \frac{1}{n}$ fournit par ailleurs la relation : $\boxed{\ell^3 - 3\ell + 2 = 0.}$ ℓ est donc finalement un zéro de $x^3 - 3x + 2$ sur $[0;\ 1]$. La factorisation de cette expression (1 est racine évidente), par exemple par division euclidienne, est : $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2)$. L'unique zéro sur $[0;\ 1]$ étant 1, on en déduit que $\underline{(x_n) \text{ converge vers } 1.}$

(Q 3) Posons : $x_n = 1 + v_n$. Alors : (v_n) converge vers 0 par opérations élémentaires. De plus : $x_n^3 = 1 + 3v_n + 3v_n^2 + v_n^3$. On en déduit :

$x_n^3 - 3x_n + 2 = 3v_n^2 + v_n^3$. Ainsi : $3v_n^2(1 + \frac{1}{3}v_n) = \frac{1}{n}$. Puisque $\lim_{1+\frac{2}{3}v_n \to =} 1$, nous en déduisons : $1 + \frac{1}{3}v_n \sim 1$. Ainsi, $\frac{1}{n} \sim 3v_n^2$ par produit. Par quotient : $\boxed{v_n^2 \sim \frac{1}{3n}}$.
Enfin, v_n étant négative, $\sqrt{v_n^2} = -v_n$, donc en passant à la racine l'équivalent précédent, nous en déduisons : $\boxed{v_n \sim -\frac{1}{\sqrt{3n}}}$.

(Q 4) $v_n \sim -\frac{1}{\sqrt{3n}} \Leftrightarrow x_n - 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$. En remarquant que $o\left(\frac{1}{\sqrt{3n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, car $o(\lambda u_n) = o(u_n)$ quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et en faisant passer le 1 de l'autre côté, nous obtenons le développement :
$\boxed{x_n = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ avec $\underline{a = 1 \text{ et } b = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Correction de l'exercice 8 :

1. $e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \to 1 \Leftrightarrow e^{u_n - v_n} \to 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n - v_n$ 0.
2. Si $u_n \sim v_n$, a-t-on $e^{u_n} \sim e^{v_n}$? Cette assertion est fausse. Prenons pour tout entier $n \geq 0, u_n = n+1$ et $v_n = n$. Alors $u_n \sim v_n$ mais $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e$ est le terme général d'une suite ne convergeant pas vers 1.

Correction de l'exercice 11 :

(a) $f(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim 1$ car $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(b) Après factorisation par $\sqrt{x}$ nous obtenons l'équivalent classique : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Pour ce qui est du dénominateur, nous constatons que :
$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = 1$. Nous écrivons alors : $\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ $\ln\left(1 + \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} - 1\right)\right) \sim \frac{e^x-1}{e^x+1} - 1 \sim -\frac{2}{e^x+1} \sim -\frac{2}{e^x}$ $(1 = o_{+\infty}(e^x)$ donc : $e^x+1 \sim e^x$.) Finalement, par quotient : $f(x) \sim_{+\infty} -\frac{e^x}{4\sqrt{x}}$. Puisque : $\lim_{x\to+\infty} -\frac{e^x}{4\sqrt{x}} = -\infty$ par croissances comparées, nous en déduisons : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(c) Puisque $\lim_{x\to+\infty} e^-x = 0$, nous avons : $\text{Arctan}(e^{-x}) \sim e^{-x}$. Par produit : $f(x) \sim_{+\infty} \frac{x^3}{e^x}$. Par croissances comparées : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(d) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \sim_0 \frac{x^2/2}{x} \sim_0 \frac{x}{2}$. $\lim_{x\to 0} x/2 = 0$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(e) $f(x) = \frac{3}{x^3-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{-2x^3+3x^2-1}{(x^3-1)(x^2-1)}$. En posant $x = 1 + h$ avec h proche de 0 pour x proche de 1, le numérateur devient : $-3h^2 - 2h^3 \sim_0 -3h^2$. Ainsi, $-2x^3 + 3x^2 - 1 \sim_1 -3(x-1)^2$. Le même changement de variable au dénominateur donne : $((1+u)^3-1)((1+u)^2-1) \sim_0 6u^2$. Ainsi : $(x^3-1)(x^2-1) \sim_1 (x-1)^2$. Par quotient : $f(x) \sim_1 -\frac{1}{2}$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$.

(f) $f(x) = \frac{x^x - 1}{x-1} = \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x-1}$. Or $e^{x\ln(x)} - 1 \sim_1 x\ln(x)$ car $\lim_{x\to 1} x\ln(x) = 0$. De plus $\lim_{x\to 1} x = 1$ donc $x \sim_1 1$. Enfin, $\ln(x) = \ln(1 + (x-1)) \sim_1 x - 1$ ce qui donne au final : $f(x) \sim_1 1$ et donc $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

(g) En posant $x = 4+u$ et en factorisant, nous aboutissons à l'expression : $-3\frac{\sqrt{1+\frac{u}{9}} - 1}{1 - \sqrt{1-u}} \sim_0 \frac{\frac{u}{6}}{\frac{u}{2}} \sim_0 \frac{1}{3}$. Donc : $f(x) \sim_1 \frac{1}{3}$ et par conséquent : $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{3}$.

(h) De même, avec $x = 2 + u$ nous aboutissons à : $2\frac{\sqrt{1+\frac{u}{4}} - 1}{\ln(1 + u/2)} \sim_0 \frac{1}{2}$. Ainsi, $f(x) \sim_1 \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

(i) On pose, $x = \frac{\pi}{4} + u$ et on utilise :
$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ avec $a = \frac{\pi}{4}$, $b = u$.
L'expression devient alors :
$$\frac{-2\tan(u)}{(1-\tan(u))\cos(\pi/2 + 2u)} = \frac{-2\tan(u)}{(1-\tan(u)) \times -\sin(2u)}.$$
En remarquant que $1 - \tan(u) \sim_1 1$ puisque : $\lim_{u\to 0} 1 - \tan(u) = 1$ et en procédant par opérations usuelles sur les équivalents usuels, nous obtenons : $f(x) \sim_1 1$ ce qui donne : $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

(j) On pose : $x = \frac{\pi}{3} + u$. Alors le numérateur devient : $1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + u\right) = 1 - \cos(u) - \sqrt{3}\sin u = \frac{u^2}{2} + o_0(u^2) - \sqrt{3}(u + o_0(u)) = -\sqrt{3}u + o_0(u)$ car $u^2 = o_0(u)$ et par opérations usuelles sur la relation de négligeabilité. Ainsi : $1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + u\right) \sim_0 -\sqrt{3}u$ donc : $1 - 2\cos(x) \sim_{\pi/3} -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. En factorisant par -3 le dénominateur, on obtient : $f(x) \sim_{\pi/3} \frac{\sqrt{3}}{3}$ et par conséquent : $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(k) On pose : $x = \frac{\pi}{3} + u$, ce qui donne : $\frac{-\sqrt{2}\sin(u)}{1 - \cos(u) - \sin(u)}$.
Or $1 - \cos(u) - \sin(u) = \frac{u^2}{2} + o_0(u^2) - u - o_0(u) = -u + o_O(u)$ car $u^2 = o_0(u)$ et par opérations usuelles sur la relation de négligeabilité. Par conséquent : $1 - \cos(u) - \sin(u) \sim_0 -u$ et donc : $\frac{-\sqrt{2}\sin(u)}{1-\cos(u)-\sin(u)} \sim_0 \sqrt{2}$. On en déduit : $f(x) \sim_{\pi/4} \sqrt{2}$ ce qui prouve que : $\lim_{x\to\pi/4} f(x) = \sqrt{2}$.

(l) On pose $x = \frac{\pi}{4} + u$ et on utilise $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, ce qui donne :

$f\left(\frac{\pi}{4}+u\right) = \dfrac{-\sqrt{2}\sin(u)}{1-\cos(u)-\sin(u)}$. Or, $1-\cos(u) \sim \dfrac{u^2}{2}$ donc $1-\cos(u) = \dfrac{u^2}{2} + o(\dfrac{u^2}{2})$. De plus : $-\sin(u) = -u+o(u)$. Donc : $1-\cos(u)-\sin(u) = -u+o(u)+\underbrace{\dfrac{u^2}{2}+o(\dfrac{u^2}{2})}_{=o(u)} = -u+o(u) = -u+o(-u)$. Ceci prouve donc que : $1-\cos(u)-\sin(u) \sim_0 -u$. Puisque : $-\sqrt{2}\sin(u) \sim -\sqrt{2}u$, par quotient : $f\left(\frac{\pi}{4}+u\right) \sim_0 \sqrt{2}$

Au final, $f(x) \sim_{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}$, donc : $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \sqrt{2}.}$

Correction de l'exercice 13 :

(a) $(1+\sqrt{x})^{1/x} = e^{f(x)}$, avec $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}$. Par opérations usuelles sur les équivalents, $f(x) \sim_0 \sqrt{x}$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Par composition des limites,

$\boxed{\lim_{x\to(1+\sqrt{x})^{1/x}} = 1.}$

(b) $(1+x)^{\ln(x)} = e^{f(x)}$, avec $f(x) = \ln(x)\ln(1+x) \sim_0 x\ln(x)$. Par croissances comparées, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Par composition des limites, $\boxed{\lim_{x\to 0}(1+\sqrt{x})^{1/x} = 1.}$

(c) $\cos(x)^{1/x^3} = e^{f(x)}$, avec $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^3}$. Or $\ln(\cos(x)) \sim_0 -\dfrac{x^2}{2}$ (exercice 10 (d) par exemple), donc $f(x) \sim_0 -\dfrac{1}{2x}$. Nous avons donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, donc par composition des limites,

$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \cos(x)^{1/x^3} = 0}$ et $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \cos(x)^{1/x^3} = +\infty.}$

(d) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^{f(x)}$, avec $f(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. Or :

$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(1+\dfrac{x+1}{x-1}-1\right) = \ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)$.

Puisque $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x-1} = 0$, on en déduit : $\ln\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right) \sim_{+\infty} \dfrac{2}{x-1}$. Ainsi, par produit, $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{2x}{x-1} \sim_{+\infty} 2$ (équivalents d'expressions polynômiales en l'infini). Nous en déduisons : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ donc :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x = e^2}$ par composition des limites.

(e) $\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}\right)^x = e^{f(x)}$, avec :

$f(x) = \ln\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}\right) = \ln\left(1+\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}-1\right) = \ln\left(1+\frac{3x}{x^2-x+1}\right)$.

Or, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x^2-x+1} = 0$, donc :

$f(x) \sim_{+\infty} x\dfrac{3x}{x^2-x+1} \sim_{+\infty} 3$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

donc : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}\right)^x = e^3}$ par composition des limites.

(f) $\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = e^{f(x)}$ avec $f(x) = x\ln(x)\ln\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)$.

Or : $\ln(x+1) = \ln(x(1+1/x)) = \ln(x)+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, donc : $f(x) = x\ln(x)\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$. Or, par opérations usuelles, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0$ donc : $f(x) \sim_{+\infty} x\ln(x)x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} 1$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = e}$ par composition des limites.

Correction de l'exercice 14 :

Puisque f est dérivable en a, on a par définition,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to_{x\to a} f'(a)$$

Or $f'(a) \neq 0$ donc

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)f'(a)} \to_{x\to a} 1$$

et

$$f(x)-f(a) \sim_a (x-a)f'(a)$$

⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆