Lycée Déodat de Séverac PTSI

Nom : **Prénom :**

Test de cours sur les espaces vectoriels

NOTE :

1. Complétez : « Pour E muni d'une loi de composition interne notée « $+$ », et d'une loi de composition externe, notée « . », on dit que $(E,+,.)$ est un espace vectoriel lorsque :
   (i) $(E,+)$ est ....
   (ii) Pour tous $(\overrightarrow{u};\ \overrightarrow{v}) \in E^2$ et $(\lambda;\ \mu) \in \mathbb{K}^2$; $\left.\begin{array}{l}\lambda.(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda.\overrightarrow{u}+\mu.\overrightarrow{u}\end{array}\right\}$ (distributivité mixte) ;
   .... (associativité mixte) ;
   ....
2. Soient $(E,+,.)$ un espace vectoriel et $F \subset E$. Quand dit-on que F est un sous-espace vectoriel de E ? ....
3. On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x-y+z=0 \right\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ....
   (b) Montrez que $F \cap G$ est une droite vectorielle et en déterminer une famille génératrice. ....
4. Soient E un espace vectoriel E de loi de composition interne notée « $+$ »et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Quand dit-on que F et G sont supplémentaires dans E ? ....
   (b) Donnez la caractérisation équivalente de $E = F \oplus G$ ....
5. Étudier la liberté de la famille : $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$. Précisez une relation de liaison dans le cas où la famille est liée.
   ....