Lycée Déodat de Séverac PTSI

Nom : **Prénom :**

Test de cours sur la comparaison des suites et fonctions

NOTE :

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Quand dit-on que :
   (a) $u_n \sim v_n$? .....
   (b) $u_n = o(v_n)$? .....
   (c) $u_n = O(v_n)$? .....
2. Donnez un équivalent simple de $n + \ln(n) \sim n$. Justifiez .....
3. Donnez un équivalent simple des suites de termes généraux suivants. Justifiez.
   (a) $e^{1/n} - 1$: .....
   (b) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1$: .....
   (c) $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$: .....
   (d) $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$: .....
   (e) $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)$: .....
   (f) $\ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$: .....
   (g) $\sqrt{n^2 + n + 1}$: .....
4. Complétez :
   (a) Si $u_n = O(v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;
   (b) Si $u_n = o(v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots\ldots$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;
   (c) $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = \ldots + o(\ldots)$.
5. Complétez :
   (a) transitivité : $o(u_n) = \ldots\ldots$ (b) multiplication par $\lambda \in \mathbb{R}$: $\ldots\ldots$
   (c) puissance $\alpha \in \mathbb{R}$: $o(u_n)^\alpha = \ldots\ldots$ (d) somme : $o(u_n) = \ldots\ldots$
6. Pour les deux suites ci-dessous, précisez à chaque fois laquelle est négligeable devant l'autre :
   (a) $u_n = a^n$, $a > 1$ et $v_n = n!$ .....
   (b) $u_n = n!$ et $v_n = n^n$ .....
   (c) $u_n = n^\alpha$, $\alpha > 1$ et $v_n = \ln(n)$ .....
   (d) $u_n = \ln(n)^\beta$, $\beta > 0$ et $v_n = n!$ .....
7. Donnez un équivalent simple de $\ln(x)$ en 1, justifiez .....
8. Donnez un équivalent simple en 0, 1, 2 puis $+\infty$ de $\dfrac{x^4 - x^2}{x^3 - x}$. Justifiez. .....